

代数入門・筆答レポート (第一回 2019/06/03)

- 以下のものは、(a) 半群、(b) モノイド、(c) 群、(d) そのいずれでもないか、最も適当なものをそれぞれ答えよ。(解答のみでよい。)[3点 × 5]
 - 有理整数全体の集合 \mathbb{Z} で通常の乗法を演算とするもの。
 - 有理整数全体の集合 \mathbb{Z} で通常の減法を演算とするもの。
 - 有理整数全体の集合 \mathbb{Z} で通常の加法を演算とするもの。
 - 実数を成分とする n 次正方形列のすべてを要素とする集合で通常の乗法を演算とするもの。
 - 正の有理数全体の集合で通常の乗法を演算とするもの。
- $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の乗法に関するモノイドとしての単数群の乗法表をかけ。[5点]
- M をモノイドとし u を M の正則元とする。写像 $f: M \rightarrow M$ ($f(a) = au$) は全単射であることを示せ。[5点]
- $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ とする。 A に演算 (積) を
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$
で定める。[5点 × 2]
 - A はこの演算でモノイドになることを示せ。
 - (a, b) が正則元になるための必要十分条件を a, b の条件として書き、そのときの逆元も求めよ。
- 3次対称群 S_3 を考える。[5点 × 2]
 - S_3 の元をすべて書け。また S_3 の位数を答えよ。
 - (1) で求めた各元に対して、その位数を答えよ。
- G を群とし $g \in G$ とする。 H が G の部分群であるとき $g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg \mid h \in H\}$ も G の部分群であることを示せ。[5点]
- H を G の部分群とする。 $a, b \in G$ に対して $a^{-1}b \in H$ であるときに $a \sim b$ として、 G 上の関係 \sim を定める。このとき \sim は同値関係であることを示せ。[5点]
- G, H を群とし、写像 $f: G \rightarrow H$ は、任意の $a, b \in G$ に対して $f(ab) = f(a)f(b)$ をみたすとする。このとき、任意の $a \in G$ に対して $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ となることを示せ。[5点]

[3点 × 5 + 5点 × 9 = 60点満点]