

代数入門・試験 (2020/08/03 修正版)

以下の問題は説明不要。解答を指定された枠内に書くこと。解答のみを採点する。

- 5 次対称群の位数を答えよ。[5 点]
- $a = 19837$, $b = 13529$ とする。
 - a と b の最大公約数 d を求めよ。[5 点]
 - $ax + by = d$ となる整数の組 (x, y) を一つ求めよ。[5 点]
- n を自然数とする。環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が体となるための n に関する条件を答えよ。[5 点]
- $\mathbb{Z}/89\mathbb{Z}$ における $60 + 89\mathbb{Z}$ の乗法に関する逆元を求めよ。[5 点]
- 有理整数環 \mathbb{Z} 以外で、体ではない整域の例を一つ書け。(なるべく具体的に書くこと。)[5 点]
- m, n を自然数とする。写像 $f: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $f(a + m\mathbb{Z}) = a + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義されるための m, n に関する条件を答えよ。[10 点]
- 単位元をもつ可換環 R と R 上の 0 でない一変数多項式 $f(x)$ で、 $f(x)$ の次数より $f(x) = 0$ の根の数が大きいものの例を書け。(R と $f(x)$ を具体的に書くこと。)[10 点]
- F をちょうど 4 つの要素をもつ体とする。 F の乗法表と加法表をかけ。[10 点]

以下の問題は証明などを書くこと。

- G を群、 H を G の部分群とする。 $a, b \in G$ に対して $a \sim b$ であることを $ab^{-1} \in H$ であることで定める。このとき \sim は G 上の同値関係であることを示せ。[10 点]
- G を群とし $a \in G$ を固定しておく。 $C_G(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$ とおく。
 - $C_G(a)$ は G の部分群であることを示せ。[10 点]
 - $x, y \in G$ に対して $xax^{-1} = yay^{-1}$ であることと $xC_G(a) = yC_G(a)$ であることは同値であることを示せ。[10 点]
- n を自然数とする。環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に乗法 $(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義されることを示せ。[10 点]
- K を体、 $K[x]$ を K 上の一変数多項式環とする。 $a \in K$ を一つ固定し、 $I = \{f(x) \in K[x] \mid f(a) = 0\}$ とおく。このとき I は $K[x]$ のイデアルであることを示せ。[10 点]

[(5 点 \times 6) + (10 点 \times 8) = 110 点満点]

解答用紙は裏面も利用可能。裏面でも足りないときには 2 枚目を配布するので申し出ること。2 枚目の裏面も利用可能。