

## 代数入門・筆答レポート (第二回 2021/07/26 修正版)

1. 次のようなものの具体例をそれぞれ一つ書け。[3 点 × 5]
  - (1) 単位元をもつ可換環で整域ではないもの
  - (2) 非可換な環
  - (3) 単位元をもたない環で零環ではないもの
  - (4) 体でない整域
  - (5) 無限個の要素をもつ標数が 0 でない体
2.  $d$  を 13157 と 15833 の最大公約数とする。  $13157x + 15833y = d$  となる整数の組  $(x, y)$  を一つ求めよ。[5 点]
3.  $\mathbb{Z}/121\mathbb{Z}$  における  $\bar{17} = 17 + 121\mathbb{Z}$  の逆元を求めよ。[5 点]
4.  $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$  上の多項式  $f(x) = \bar{2}x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{7}$  を  $g(x) = \bar{3}x^2 + \bar{1}x + \bar{8}$  で割った商と余りを求めよ。ただし多項式の係数は  $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{10}$  の形で答えること。[5 点]
5.  $R = M_2(\mathbb{R})$  (実数体  $\mathbb{R}$  上の 2 次全行列環) とする。  $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$  とする。[5 点 × 2]
  - (1)  $S$  は  $R$  の部分環であることを示せ。
  - (2)  $S$  は体であることを示せ。(環であることを示さずに使ってよい。)
6.  $R$  を環とし  $I, J$  を  $R$  のイデアルとする。このとき  $I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$  は  $R$  のイデアルであることを示せ。[5 点]
7.  $R$  を環とし  $I$  を  $R$  のイデアルとする。このとき  $(a + I)(b + I) = ab + I$  によって集合  $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$  に乗法が矛盾なく定義されることを示せ。[5 点]
8.  $R$  を整域とし、集合として有限集合であるとする。このとき  $R$  は体であることを示せ。[5 点]
9. 実数体  $\mathbb{R}$  上の  $n$  次全行列環  $M_n(\mathbb{R})$  のイデアルは  $\{O\}$  と  $M_n(\mathbb{R})$  に限ることを示せ。ただし  $O$  は零行列である。[5 点]
10.  $0 \neq f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$  が原始的であるとは、係数  $a_0, a_1, \dots, a_n$  の最大公約数が 1 であることとする。  $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$  が原始的であるとき  $f(x)g(x)$  も原始的であることを示せ。[5 点]

[(3 点 × 5) + (5 点 × 10) = 65 点満点]