代数入門・筆答レポート (第一回 2022/05/30)

1. 次のようなものを具体的に一つずつ答えよ。(説明不要。集合と演算が明確になるように答えること。) [3 点 $\times$ 5]
   (1) 結合法則をみたさない二項演算
   (2) モノイドでない半群
   (3) 群でないモノイド
   (4) アーベル群でない (交換法則をみたさない) 群
   (5) 無限群

2. モノイド M の正則元 u に対して、その逆元は唯一つであることを示せ。[5 点]

3. 集合 $S = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ に演算を
$$(a,b,c)(d,e,f) = (af + cd,\ bf + ce,\ cf)$$
で定める。このとき次の問いに答えよ。[5 点 $\times$ 2]
   (1) この演算が結合法則をみたすことを示し、さらに単位元を求めよ。
   (2) $(a,b,c) \in S$ が正則元であるための必要十分条件を a,b,c に関する条件として求め、その条件をみたすときの逆元も求めよ。

4. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{a + 12\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ を考える。[5 点 $\times$ 2]
   (1) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ に $(a + 12\mathbb{Z})(b + 12\mathbb{Z}) = ab + 12\mathbb{Z}$ で乗法が矛盾なく定義できることを示せ。
   (2) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ は乗法に関してモノイドである (示さなくてよい)。$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の乗法に関する単数群 $U(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ を求めよ。

5. G を群とする。$a,b \in G$ に対して、$a \sim b$ であることを、「ある $g \in G$ が存在して $b = g^{-1}ag$ となる」ことで定める。このとき関係 $\sim$ は G 上の同値関係であることを示せ。[5 点]

6. G を群とし H, K を G の部分群とする。このとき $H \cap K$ も G の部分群であることを示せ。[5 点]

7. G をアーベル群とする。G の位数が有限である元全体の集合を H とする。このとき H は G の部分群であることを示せ。[5 点]

8. 位数 $|G|$ が素数 p である群 G は巡回群であることを示せ。[5 点]

[(3 点 $\times$ 5) + (5 点 $\times$ 9) = 60 点満点]