代数入門・筆答レポート (第二回 2022/07/25) 解答例

1. $d = 23$, $(x, y) = (29, -50)$ ((x, y) は一意的ではない)

2. $x \equiv 49, 108, 167 \pmod{177}$ (解答は一意的でなく、一つ書いてあればよい)

   $123 \times (-23) + 177 \times 16 = 3$ を用いて $x \equiv -23 \times 3 \equiv 108 \pmod{177}$

3. $\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, , \overline{9}, \overline{11}, \overline{13}$

4. a は零因子だから、ある $0 \neq b \in R$ が存在して $ab = 0$ である。$f(0) = a0 = 0 = ab = f(b)$ かつ $0 \neq b$ だから f は単射ではない。

   f が単射であることの定義は「$\forall x, y \in R\ ((f(x) = f(y)) \implies (x = y))$」である。その否定は「$\exists x, y \in R\ ((f(x) = f(y)) \wedge (x \neq y))$」となる。

5. - $f(x) = 0$ とすれば $f(\alpha) = 0$ だから $f \in I$ である。よって $I \neq \emptyset$ である。
   - $f(x), g(x) \in I$ とする。$f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ である。$(f - g)(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = 0$ だから $f(x) - g(x) \in I$ である。
   - $f(x) \in I, h(x) \in K[x]$ とする。$f(\alpha) = 0$ である。$(fh)(\alpha) = f(\alpha)h(\alpha) = 0h(\alpha) = 0$ だから $f(x)h(x) \in I$ である。$K[x]$ は可換環だから $h(x)f(x) \in I$ も成り立つ。

   以上より I は $K[x]$ のイデアルである。

6. (1) $f(0_R) = f(0_R + 0_R) = f(0_R) + f(0_R)$ である。両辺に $-f(0_R)$ を加えれば $f(0_R) = 0_S$ となる。$0_S = f(0_R) = f(a + (-a)) = f(a) + f(-a)$ である。両辺に $-f(a)$ を加えれば $-f(a) = f(-a)$ となる。

   (2)
   - $0_S = f(0_R) \in f(R)$ だから $f(R) \neq \emptyset$ である。
   - $x, y \in f(R)$ とする。ある $a, b \in R$ が存在して $f(a) = x$, $f(b) = y$ となる。$x - y = f(a) - f(b) = f(a) + f(-b) = f(a - b) \in f(R)$, $xy = f(a)f(b) = f(ab) \in f(R)$ である。

   以上より $f(R)$ は S の部分環である。

   (3)
   - $f(0_R) = 0_S$ より $0_R \in f^{-1}(0_S)$ である。よって $f^{-1}(0_S) \neq \emptyset$ である。
   - $a, b \in f^{-1}(0_S)$ とする。$f(a) = f(b) = 0_S$ である。$f(a - b) = f(a) - f(b) = 0_S - 0_S = 0_S$ だから $a - b \in f^{-1}(0_S)$ である。
   - $a \in f^{-1}(0_S)$, $r \in R$ とする。$f(a) = 0_S$ である。$f(ra) = f(r)f(a) = f(r)0_S = 0_S$ であるから $ra \in f^{-1}(0_S)$ である。$f(ar) = f(a)f(r) = 0_S f(r) = 0_S$ であるから $ar \in f^{-1}(0_S)$ である。

   以上より $f^{-1}(0)$ は R のイデアルである。

7. n に関する帰納法で示す。$n = 0$ のとき、$f(x)$ は 0 でない定数であるから、その根は 0 個であり、主張は成立する。

   $n > 0$ とする。$f(x)$ に根がなければ、「高々 n 個」という主張は成立する。$f(x)$ が根 α をもつとする。因数定理から $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ となる $g(x) \in R[x]$ が存在し $\deg g(x) = n - 1$ である。β を $f(x)$ の根とすれば $0 = f(\beta) = (\beta - \alpha)g(\beta)$ である。R は整域なので $\beta = \alpha$ または $g(\beta) = 0$、すなわち β は $g(x)$ の根、となる。帰納法の仮定から $g(x)$ の根は高々 $n - 1$ 個なので、$f(x)$ の根は高々 n 個である。

8. (1)
   - $(a, s) \in R \times S$ に対して、$as = as$ なので $(a, s) \sim (a, s)$ である。
   - $(a, s) \sim (b, t)$ とする。$at = bs$ なので $(b, t) \sim (a, s)$ である。
   - $(a, s) \sim (b, t)$, $(b, t) \sim (c, u)$ とする。$at = bs$, $bu = ct$ である。$atu = bsu = cst$ であり、R は整域、$t \neq 0$ だから $au = cs$ である。よって $(a, s) \sim (c, u)$ である。

   以上より $\sim$ は同値関係である。

   (2) $[a, s] = [a', s']$, $[b, t] = [b', t']$ とする。$as' = a's$, $bt' = b't$ である。$(a't' + b's')st = a't'st + b's'st = as'tt' + bt'ss' = (at + bs)s't'$ であるから $(at + bs, st) \sim (a't' + b's', s't')$、すなわち $[at + bs, st] = [a't' + b's', s't']$ が成り立つ。したがってこの演算は矛盾なく定義できる。

9. $x^2 + 1$, $x^2 + x + 2$, $x^2 + 2x + 2$