代数入門・筆答レポート (第二回 2023/07/24)

1. $a = 7031$, $b = 11303$ とする。a と b の最大公約数 d を求め、$ax + by = d$ となる整数の組 (x, y) を 1 組求めよ。(解答のみでもよい) [5 点]

2. 可換環 $\mathbb{Z}/256\mathbb{Z}$ における $33 + 256\mathbb{Z}$ の逆元を求めよ。(解答のみでもよい) [5 点]

3. 多項式環 $\mathbb{R}[x]$ のイデアル $I = (x^2 + x + 1)\mathbb{R}[x]$ を考える。剰余環 $\mathbb{R}[x]/I$ における $(x + 3) + I$ の逆元を求めよ。(解答のみでもよい) [5 点]

4. $M_2(\mathbb{R}) \supset S = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ とする。S は $M_2(\mathbb{R})$ の部分環であるかどうかを判定せよ。(解答だけでなく理由も書くこと。) [5 点]

5. 単位元をもつ可換環 R の正則元は零因子ではないことを示せ。[5 点]

6. 単位元をもつ環 R のイデアル I を考える。$I = R$ であることと $1_R \in I$ であることは同値であることを示せ。[5 点]

7. n を自然数とする。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に積 $(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義できることを示せ。[5 点]

8. R を環とし $I = \{r \in R \mid$ ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $r^n = 0\}$ とおく。 [5 点 $\times$ 2]
   (1) 可換環 R に対して I は R のイデアルであることを示せ。
   (2) R が可換環でないとき I はイデアルとは限らない。そのような R を具体的に与え、I がイデアルでないことを説明せよ。

9. $m,\ n$ を互いに素な自然数とする。写像 $f : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, $f(a + mn\mathbb{Z}) = (a + m\mathbb{Z}, a + n\mathbb{Z})$ は全単射であることを示せ。(f が定義されることは示さずに使ってよい。) [5 点]

10. G, H を群とする。写像 $f : G \to H$ は任意の $a, b \in G$ に対して $f(ab) = f(a)f(b)$ が成り立つものとする。[5 点 $\times$ 2]
    (1) $f(G)$ は H の部分群であることを示せ。
    (2) $f^{-1}(1_H)$ は G の正規部分群であることを示せ。

[5 点 $\times$ 12 $=$ 60 点満点]