代数入門・筆答レポート (第一回 2024/06/10)

1. 群の定義をなるべく丁寧に書け。[5 点]

2. モノイドの単位元はただ一つであることを示せ。[5 点]

3. M をモノイドとし $a \in M$ に対して、写像 $f : M \to M$, $f(x) = ax$ を考える。[5 点 $\times$ 2]

   (1) a が正則元であるとき f は全単射であることを示せ。

   (2) f が全射ではないような例と単射ではないような例を、それぞれ一つずつ書け。(M、M の演算、および a を明確にすること。証明はしなくてよい。)

4. $n \in \mathbb{N}$ とする。$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の乗法 $(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ を考える。[5 点 $\times$ 2]

   (1) この乗法が矛盾なく定義されること (well-defined であること) を示せ。

   (2) $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ の乗法に関する単数群を求めよ。

5. G を群、H, K を G の部分群とする。$H \cap K$ は G の部分群であることを示せ。[5 点]

6. G をアーベル群とし、$n \in \mathbb{N}$ を一つ固定する。$H = \{g \in G \mid g^n = 1\}$ とするとき H は G の部分群であることを示せ。[5 点]

7. $S = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ に次の演算を定める。[5 点 $\times$ 2]

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (-a_1b_2 - a_2b_1, -b_1b_2)$$

   (1) この演算が結合法則をみたすことを示せ。また単位元を求めよ。

   (2) $(a, b) \in S$ が正則元となる条件を a, b に関する条件として求め、そのときの逆元も求めよ。

8. G を群、H を G の部分群とする。$a, b \in G$ に対して、$ab^{-1} \in H$ であるとき $a \sim b$ として、G 上の関係 $\sim$ を定める。関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ。[5 点]

9. G を群、H を G の部分群、N を G の正規部分群とする。また $h \in H$ とする。このとき $h(H \cap N) = (H \cap N)h$ が成り立つことを示せ。[5 点]

[5 点 $\times$ 12 = 60 点満点]