

代数入門・筆答レポート (第二回 2024/07/29)

1. $a = 287, b = 413$ とする。 a と b の最大公約数 d を求め、 $ax + by = d$ となる整数の組 (x, y) を 1 組求めよ。(解答のみでもよい) [5 点]
2. $\mathbb{Z}/137\mathbb{Z}$ における $12 + 137\mathbb{Z}$ の逆元を求めよ。(解答のみでもよい) [5 点]
3. $12x \equiv 15 \pmod{111}$ となる整数 x を一つ求めよ。(解答のみでもよい) [5 点]
4. 可換環 $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ の正則元をすべてかけ。(解答のみでもよい)[5 点]
5. R を環、 I と J を R のイデアルとする。 $I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$ は R のイデアルであることを示せ。[5 点]
6. R を環、 I を R のイデアルとする。剰余類の集合 R/I に乗法 $(a+I)(b+I) = ab+I$ が矛盾なく定義されることを示せ。[5 点]
7. $R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ に加法と乗法を
$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$
で定義する。[5 点 \times 2]
 - (1) R は分配法則をみたすことを示せ。
 - (2) R は上の演算で環となる (証明しなくてよい)。 $(a, b) \in R$ が正則元となる a, b に関する条件を求め、そのときの逆元を答えよ。
8. 単位元をもつ環 R の正則元は左零因子ではないことを示せ。[5 点]
9. K を標数 p ($\neq 0$) の体とする。写像 $f : K \rightarrow K, f(a) = a^p$ は単射であることを示せ。[5 点]
10. K を体とする。 $f(x) \in K[x]$ の次数を $n \geq 1$ とする。剰余環 $K[x]/f(x)K[x]$ の完全代表系として $\{g(x) \in K[x] \mid \deg(g(x)) < n\}$ を選ぶことができることを示せ。[5 点]
11. $\alpha \in \mathbb{C}$ は、ある 0 でない \mathbb{Q} -係数多項式の根であるとする。 $m(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を $m(\alpha) = 0$ となる 0 でない \mathbb{Q} -係数多項式のうち次数が最小のものとする。 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ が $f(\alpha) = 0$ をみたすならば、 $f(x)$ は $m(x)$ で割り切れることを示せ。[5 点]

[5 点 \times 12 = 60 点満点]