線形代数学 II・筆答レポート (第一回 2023/11/16)

1. 次の連立一次方程式を解け。[5 点] $\begin{cases} 2x - y + z - 2u = -1 \\ 4x - 2y + 3z - 2u = 0 \\ -6x + 3y - z + 10u = 7 \\ -8x + 4y - 2z + 12u = 8 \end{cases}$

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。[5 点]

3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 & 4 \\ -7 & -6 & 8 & 21 \\ -4 & -7 & 9 & 11 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ の行列式を求めよ。[5 点]

4. 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ に対して、線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める。[5 点 × 2]

   (1) f の像 $f(\mathbb{R}^4)$ の一組の基底を求めよ。

   (2) f の核 $f^{-1}(\mathbf{0})$ の一組の基底を求めよ。

5. $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1,-1)$, $\boldsymbol{b}_1 = {}^t(0,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = {}^t(2,1)$ とする。$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$, $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の基底である。基底の変換行列 P ($(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2)P = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2)$ となる行列 P) を求めよ。[5 点]

6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ の標準基底に関する表現行列が $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ であるとき、f の基底 $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(0,-2,1), \boldsymbol{a}_2 = {}^t(1,-2,1), \boldsymbol{a}_3 = {}^t(0,1,0)$ に関する表現行列を求めよ。[5 点]

7. 実数を成分とする (m,n) 型の行列 A と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ について、n 次元実列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を変数とする連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える。[5 点 × 2]

   (1) $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ であるとき、この連立一次方程式の解全体の集合 V は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを示せ。

   (2) この連立一次方程式の解全体の集合 V が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとき $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ であることを示せ。

8. V, W を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし $f : V \to W$ を線形写像とする。[5 点 × 3]

   (1) f の核 $f^{-1}(\mathbf{0})$ は V の部分空間であることを示せ。

   (2) $f^{-1}(\mathbf{0})$ の基底を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ とし、それを延長して V の基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を作る。このとき $f(\boldsymbol{a}_{r+1}), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)$ は f の像 $f(V)$ を生成することを示せ。

   (3) (2) と同じ設定で $f(\boldsymbol{a}_{r+1}), \ldots, f(\boldsymbol{a}_n)$ は一次独立であることを示せ。

[5 点 × 12 = 60 点満点]