線形代数学続論

2019 年度 花木章秀 (2019/03/25)

このノートを通して K を実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とする。(実際には多くのことが任意の体 K 上で成り立つ。)

1　行列、線形写像、およびベクトル空間に関する復習

1.1　ベクトルと行列

K の要素を $m \times n$ の長方形に並べて括弧でくくったものを (m, n) **行列**、$m \times n$ **行列**などという。(m, n) をその行列の**型**という。特に $(1, n)$ 行列を n **次元行ベクトル**、$(m, 1)$ 行列を m **次元列ベクトル**ともいう。行列の横の並びを**行**といい、縦の並びを**列**という。第 1 行、第 2 行などの言い方もする。第 i 行、第 j 列にある K の要素を (i, j) **成分**という。(i, j) 成分が a_{ij} である行列をしばしば (a_{ij}) と略記する。(i, j) 成分が a_{ij} である行列であることを明示したいときには $(a_{ij})_{i,j}$ などとも書く。このノートでは行列は通常アルファベットの大文字を用いて A, B などと表し、ベクトルはアルファベットの小文字の太字を用いて $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ などと表す。K の元を**スカラー**と呼ぶ。スカラーはアルファベットの小文字を用いて s, t などと表す。

型の等しい 2 つの行列に**加法**を

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

で定める。ここでは行 (列) ベクトルも行列とみなしているので、これによって行 (列) ベクトルにも加法が定まる。行列の加法について

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

が成り立つ (交換法則と結合法則)。

行列の**スカラー倍**を

$$k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

で定める。ただし、ここで $k \in K$ である。

O で全ての成分が 0 である行列を表し、これを**零行列**という。型も明示したいときには $O_{m,n}$ などと表す。$m = n$ であるときは O_n とも表す。ベクトルについては記号 $\mathbf{0}$ を用い、これを**零ベクトル**という。任意の行列 A に対して $0A = O$ は明らかである。

行列 $A = (a_{ij})$ に対して、$(-a_{ij})$ を $-A$ と表す。

$$A + (-A) = O, \quad (-1)A = -A$$

は明らかである。

(ℓ, m) 行列 $A = (a_{ij})$ と (m, n) 行列 $B = (b_{ij})$ に対して**乗法**を

$$AB = \left(\sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sj} \right)_{i,j}$$

で定める。ただし、ここで AB は (ℓ, n)-行列である。積の定まる 3 つの行列 A, B, C に対して $(AB)C = A(BC)$ が成り立つ (結合法則)。$AB = BA$ は一般に成り立たない (交換法則の不成立)。

例 1.1 (正方行列)**.** 行の数と列の数が等しい行列を**正方行列**という。(n, n) 行列を n **次正方行列**という。定義より、二つの n 次正方行列の積は、また n 次正方行列である。

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、a_{ii} をその**対角成分**という。

例 1.2 (三角行列)**.** n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ で $i < j$ なる (i, j) に対して $a_{ij} = 0$ であるものを**下三角行列**という。同様に $i > j$ なる (i, j) に対して $a_{ij} = 0$ であるものを**上三角行列**という。二つの下 (上) 三角行列の和と積は、また下 (上) 三角行列である。

例 1.3 (対角行列)**.** n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ で $i \neq j$ なる (i,j) に対して $a_{ij}=0$ であるものを**対角行列**という。二つの対角行列の和と積は、また対角行列である。

例 1.4 (単位行列)**.** n 次対角行列で、その対角成分がすべて 1 であるものを**単位行列**といい、E_n で表す。n を略して、単に E と書くこともある。クロネッカーのデルタ[1]、δ_{ij} を用いて $E_n=(\delta_{ij})$ と表すことが出来る。任意の (ℓ,n) 行列 A と (n,m) 行列 B に対して $AE_n=A, E_nB=B$ が成り立つ。

例 1.5. (i,j) 成分が 1 で、他の成分がすべて 0 である行列を**行列単位**といい E_{ij} などと表す。行列単位の積について

$$E_{ij}E_{k\ell}=\delta_{jk}E_{i\ell}$$

が成り立つ。任意の行列 $A=(a_{ij})$ は行列単位を用いて $A=\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}$ と表される。

第 i 成分が 1 で、他の成分が全て 0 であるベクトルを**単位ベクトル**といい $\boldsymbol{e}_i$ などと表す。

(m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ に対して、(n,m) 行列 (a_{ji}) を A の**転置行列**といい ${}^tA$ と表す。

例 1.6 (対称行列)**.** n 次正方行列 A で ${}^tA=A$ であるものを**対称行列**という。二つの対称行列の和は、また対称行列である。

例 1.7 (交代行列)**.** n 次正方行列 A で ${}^tA=-A$ であるものを**交代行列**という。二つの交代行列の和は、また交代行列である。交代行列の対角成分はすべて 0 である。

正方行列 A に対して $AB=BA=E$ となる正方行列 B が存在するとき、A を**正則行列**といい、B をその**逆行列**という。正則行列 A の逆行列は一意的で、それを A^{-1} と表す。(実際には $AB=E$ ならば $BA=E$ も成り立ち A は正則で B がその逆行列となる。)

命題 1.8. (1) 単位行列 E は正則で $E^{-1}=E$ である。

(2) A が正則行列ならば、逆行列 A^{-1} も正則で、$(A^{-1})^{-1}=A$ である。

(3) A, B がともに正則行列ならば、積 AB も正則で、$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ である。

この命題から、n 次正則行列の全体が群となることが分かる。

例 1.9 (直交行列)**.** n 次実正方行列 A で、${}^tA=A^{-1}$ であるものを**直交行列**という。二つの直交行列の積は、また直交行列である。

複素行列 $A=(a_{ij})$ に対して $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$ とおいて、これを A の**複素共役**という。更に $A^*={}^t\overline{A}=(\overline{a_{ji}})$ とおいて、これを A の**随伴行列**という。

例 1.10 (エルミート行列)**.** n 次複素正方行列 A で $A^*=A$ であるものを**エルミート行列**という。二つのエルミート行列の和は、またエルミート行列である。実行列については、エルミート行列であることと対称行列であることは同値である。

例 1.11 (ユニタリー行列)**.** n 次複素正方行列 A で $A^*=A^{-1}$ であるものを**ユニタリー行列**という。二つのユニタリー行列の積は、またユニタリー行列である。実行列については、ユニタリー行列であることと直交行列であることは同値である。

行列をいくつかの行、列に区切って考えることもある。すなわち

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のように考える。ここで A_{ij} はスカラーではなく行列である。このように見たときも、その演算は通常の行列と同じようにすることができる。すなわち

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{21}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

のようになる。ただし各々の積は定義できるものとする。また、行や列を 3 つ以上に区切ったときも同様である。

[1] $i=j$ のとき $\delta_{ij}=1$、そうでないとき $\delta_{ij}=0$ と定め、これを**クロネッカーのデルタ**という。

$A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列とする。A を m 個の行ベクトルの集まりと見ることができる。すなわち $\boldsymbol{x}_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in})$ として

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_m \end{pmatrix}$$

と見る。これを行列 A の**行ベクトル表示**という。同様に $\boldsymbol{y}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ として

$$A = (\boldsymbol{y}_1\ \ldots\ \boldsymbol{y}_n)$$

を**列ベクトル表示**という。これらも行列をいくつかの行列に区切ることの特別な場合と見ることが出来て、和や積は通常と同じに行うことができる。

1.2 行列式

$A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする。A の**行列式** $|A|$ を以下の式で定義する。

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

ただし S_n は n 次の対称群、すなわち n 次の置換全体の集合、で sgn は置換の符号である。行列式を $\det A$ とも表す。

例 1.12. (1) 2 次正方行列の行列式は以下の式で与えられる。

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(2) 3 次正方行列の行列式は以下の式で与えられる。

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

命題 1.13. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} A & O \\ C & D \end{pmatrix}$ とする。ただし A と D は正方行列であるとする。このとき

$$|M| = |A| \cdot |D|, \quad |N| = |A| \cdot |D|$$

が成り立つ。

これを繰り返し用いることによって、次の命題が成り立つ。

例 1.14. 上 (下) 三角行列の行列式は、その対角成分の積である。すなわち $A = (a_{ij})$ を n 次上 (下) 三角行列とすると以下の式が成り立つ。

$$|A| = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$$

特に、単位行列 E に対して、$|E| = 1$ である。

命題 1.15. (1) 行列の二つの行 (列) を入れ替えると、行列式は -1 倍になる。

(2) 行列の一つの行 (列) を λ 倍すると、行列式は λ 倍になる。

(3) 行列の一つの行 (列) に別の行 (列) のスカラー倍を加えても、行列式は変わらない。

4 次以上の正方行列に対しては、その行列式を例 1.12 のような "公式" を用いて計算することは現実的ではない。この場合には命題 1.15 を用いて、すなわち行、または列に基本変形[2] を施して、行列を三角行列に変形し、例 1.14 を用いるのが普通である。

命題 1.16. 転置行列 ${}^tA$ について、$|{}^tA| = |A|$ が成り立つ。

命題 1.17. (1) $|AB| = |A| \cdot |B|$

[2]行列の行の**基本変形**とは (1) 行列の二つの行を入れ替える (2) 行列の一つの行に 0 でないスカラーをかける (3) 行列の一つの行に別の行のスカラー倍を加える、の三つの操作を繰り返した操作を言う。

(2) 正則行列 A に対して $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ が成り立つ。

(3) 正則行列 P に対して $|PAP^{-1}| = |A|$ が成り立つ。

命題 1.18. 正方行列 A が正則行列であることと $|A| \neq 0$ であることは同値である。

A を n 次正方行列とする。A の i 行と j 列を取り除いた $(n-1)$ 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを A の (i,j) **余因子**といい Δ_{ij} と表す。

命題 1.19 (行列式の余因子展開)**.** $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする。このとき $1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \\ &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \end{aligned}$$

が成り立つ。(はじめの式を**列による展開**、次の式を**行による展開**という。)

$A = (a_{ij})$ に対して $\widetilde{A} = (\Delta_{ji})$ を A の**余因子行列**という。命題 1.19 により

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E$$

が成り立つ。

命題 1.20. 正方行列 A に対して、$|A| \neq 0$ のとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

が成り立つ。

1.3 ベクトル空間と基底、次元

集合 V に**加法** $V \times V \to V$ $((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ と**スカラー倍** $K \times V \to V$ $((s, \boldsymbol{v}) \mapsto s\boldsymbol{v})$ が定められていて、次の条件を満たすとき V を K**-ベクトル空間** (または K**-線形空間**) という。

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ が成り立つ。

(2) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対して $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$ が成り立つ。

(3) ある $\mathbf{0} \in V$ が存在して、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$ が成り立つ。

(4) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して、ある $\boldsymbol{w} \in V$ が存在して $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ となる。(この $\boldsymbol{w}$ を $-\boldsymbol{v}$ と表す。)

(5) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ が成り立つ。

(6) 任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ と $s, t \in K$ に対して $(s+t)\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{v}$, $s(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = s\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}$ が成り立つ。

(7) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ と $s, t \in K$ に対して $s(t\boldsymbol{v}) = (st)\boldsymbol{v}$ が成り立つ。

K が実数体 $\mathbb{R}$ のとき、$\mathbb{R}$-ベクトル空間を**実ベクトル空間**、K が複素数体 $\mathbb{C}$ のとき、$\mathbb{C}$-ベクトル空間を**複素ベクトル空間**ともいう。$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$ を $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ とも表す。$0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ なども容易に確かめられる。

例 1.21. K 上の (m,n) 行列全体の集合を $M_{m,n}(K)$ と表す。$M_{m,n}(K)$ は行列の加法とスカラー倍で K-ベクトル空間となる。特に n 次元行 (列) ベクトル全体の集合も K-ベクトル空間である。これを K^n とも表す。$m = n$ のとき $M_{m,n}(K)$ を $M_n(K)$ とも表す。

$M_{m,n}(K)$ は K の元を mn 個並べたものであるが、加法とスカラー倍だけを考えるのであれば、その並べ方には意味はない。従って、ベクトル空間としては K^{mn} と同じものと考えることが出来る。

例 1.22. K の元を係数とする一変数多項式の全体は、多項式の加法とスカラー倍 (定数倍) によって K-ベクトル空間となる。これを $K[x]$ とも表す。

V を K-ベクトル空間とする。空でない $W \subset V$ が V の**部分空間**であるとは、次の条件を満たすこととする。

(1) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$ ならば $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in W$ である。

(2) $\boldsymbol{v} \in W$, $s \in K$ ならば $s\boldsymbol{v} \in W$ である。

このとき W 自身も V の加法とスカラー倍を用いて K-ベクトル空間となる。明らかに V と $\{\mathbf{0}\}$ は V の部分空間となる。これらを V の**自明な部分空間**という。$\{\mathbf{0}\}$ を単に 0 とも表す。

例 1.23. (1) $V = K^2$ とする。$W_1 = \{(x, 0) \mid x \in K\}$, $W_2 = \{(x, -x) \mid x \in K\}$ は V の部分空間である。

(2) $V = M_2(K)$ とする。上三角行列の全体の集合、対角行列全体の集合は V の部分空間である。

例 1.24 (斉次連立一次方程式の解空間)**.** 連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

は、行列とベクトルを用いて

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表される。ただし、ここで

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

である。特に $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ であるとき、これを**斉次連立一次方程式**という。斉次連立一次方程式の解の全体は K^n の部分空間である。これを斉次連立一次方程式の**解空間**という。

命題 1.25. V をベクトル空間、W_i $(i = 1, 2, \dots, \ell)$ をその部分空間とする。

(1) $\bigcap_{i=1}^{\ell} W_i = W_1 \cap \dots \cap W_\ell$ は V の部分空間である。また、すべての W_i に含まれる部分空間のうち、最大のものである。

(2) $\sum_{i=1}^{\ell} W_i = W_1 + \dots + W_\ell = \{\sum_{i=1}^{\ell} \boldsymbol{w}_i \mid \boldsymbol{w}_i \in W_i\}$ は V の部分空間である。また、すべての W_i を含む部分空間のうち、最小のものである。

例 1.26. V をベクトル空間とし $\boldsymbol{v}_i \in V$ $(i = 1, 2, \dots, \ell)$ とする。$\sum_{i=1}^{\ell} a_i \boldsymbol{v}_i$ $(a_i \in K)$ の形の元を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_\ell$ の**一次結合**という。$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_\ell$ の一次結合の全体 $\{\sum_{i=1}^{\ell} a_i \boldsymbol{v}_i \mid a_i \in K\}$ は V の部分空間となる。これを $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_\ell$ の**張る部分空間**、または**生成する部分空間**といい $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_\ell \rangle_K$, $\langle \boldsymbol{v}_i \mid i = 1, 2, \dots, \ell \rangle_K$, $\sum_{i=1}^{\ell} K\boldsymbol{v}_i$ などと表す。添字の K は省略するときもある。

V を K-ベクトル空間とし、$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ とする。任意の $\boldsymbol{x} \in V$ が $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ の一次結合として一意的に表されるとき、$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ または $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の**基底**という。

例 1.27. $\boldsymbol{e}_i \in K^n$ を単位ベクトルとする。このとき $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ は K^n の基底である。

例 1.28. $A \in M_n(K)$ の列ベクトル表示 $A = (\boldsymbol{v}_1 \ \dots \ \boldsymbol{v}_n)$ を考える。このとき A が正則であることと $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が K^n の基底であることは同値である。行ベクトル表示についても同様である。

V を K-ベクトル空間とし、$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ とする。$\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ の**一次関係式**という。これは $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ のとき、明らかに成り立つ。このとき、これを**自明な一次関係式**という。$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が自明でない一次関係式をもつとき、これを**一次従属**であるといい、自明な関係式しかもたないとき**一次独立**であるという。

$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が一次従属であるとし、$\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ を自明でない一次関係式とする。ある i に対して $a_i \neq 0$ である。したがって

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j \neq i} \frac{a_j}{a_i} \boldsymbol{v}_j$$

となり、$\boldsymbol{v}_i$ は他のベクトルの一次結合で表される。逆にある $\boldsymbol{v}_i$ が他のベクトルの一次結合で表されるならば、自明でない一次関係式が得られる。すなわち、ベクトルが一次独立であるとは、そのいずれのベクトルも、他のベクトルの一次結合として表すことが出来ないということと同値である。

例 1.29. ベクトル空間の基底は一次独立である。

ベクトル空間 V が有限個のベクトルからなる基底をもつとき、その個数は基底の取り方に依らない。この数を V の**次元**といい $\dim_K V$ と表す[3]。$0 = \{\mathbf{0}\}$ に対しては、その次元を 0 と定め、空集合 $\emptyset$ をその基底と考える。

定理 1.30 (基底の延長可能定理)**.** V を有限次元ベクトル空間とし、W をその部分空間とする。このとき W も有限次元で $\dim_K W \leq \dim_K V$ である。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を W の基底とする。このとき、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底となるような $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在する。

例 1.31. 成分で表される有限次元ベクトル空間の基底と次元の求め方を説明する。$\boldsymbol{v}_i = (a_{i1} \ \ldots \ a_{in})$ $(i = 1, \ldots, m)$ とし、$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle_K$ を考える。行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_m \end{pmatrix} = (a_{ij})$ を考える。A に行の基本変形を施して $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_m \end{pmatrix}$ を得たとする。このとき $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle_K = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m \rangle_K$ が成り立つ。B を階段行列になるようにすれば、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の $\mathbf{0}$ を除いたものが一次独立であることがすぐに分かるので、そのときの $\mathbf{0}$ でない行は W の基底となる。したがって、そのベクトルの数が W の次元である。

V を有限次元ベクトル空間とし $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ をその二組の基底とする。任意のベクトルは基底の一次結合として一意的に表されるので

$$\boldsymbol{w}_j = a_{1j}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{v}_n \quad (j = 1, \ldots, n)$$

と表すことができる。このとき $P = (a_{ij})$ とおけば

$$(\boldsymbol{w}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{w}_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)P$$

である。この P を**基底の変換行列**という。同様に $\boldsymbol{v}_i$ を $\boldsymbol{w}_j$ の一次結合で表わせば $(\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{w}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{w}_n)Q$ となる Q が存在する。このとき $PQ = QP = E$ となるので、基底の変換行列は正則であり、$Q = P^{-1}$ である。また、もう一つの基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を考え、$(\boldsymbol{u}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{w}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{w}_n)R$ とすれば $(\boldsymbol{u}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)PR$ となる。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とし、P を正則行列とする。

$$(\boldsymbol{w}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{w}_n) = (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)P$$

で $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を定めれば、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ も V の基底となる。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする。任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は基底の一次結合で一意的に書けるので

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とする。このとき、ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{v}$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ による**成分表示**という。基底を変えれば、その成分表示も変わる。それは基底の変換行列を用いて

$$(\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{w}_n)Q \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

などと考えることができる。

[3]例えば K 上の多項式の全体 $K[x]$ は有限個の基底を取ることが出来ない。このようなときも基底を定義することはできるが、ここでは有限次元のものだけを扱う。

1.4 部分空間の直和

W_i $(i=1,\dots,s)$ をベクトル空間 V の部分空間とし、その和 $\sum_{i=1}^s W_i$ を考える。$\sum_{i=1}^s W_i$ の元は $\sum_{i=1}^s \boldsymbol{w}_i$ $(\boldsymbol{w}_i \in W_i)$ と表されるが、全ての元がこの形に一意的に表されるとき、この和を**直和**といい $\bigoplus_{i=1}^s W_i$ と表す。

命題 1.32. W_i $(i=1,\dots,s)$ をベクトル空間 V の部分空間とする。このとき次の 2 条件は同値である。

(1) $\sum_{i=1}^s W_i = \bigoplus_{i=1}^s W_i$ である。

(2) すべての i に対して $W_i \cap \sum_{j\neq i} W_j = 0$ である。

この命題で、特に $s=2$ であるときには、条件 (2) は $W_1 \cap W_2 = 0$ ということである。

命題 1.33. W_i $(i=1,\dots,s)$ をベクトル空間 V の部分空間とし $\sum_{i=1}^s W_i = \bigoplus_{i=1}^s W_i$ とする。各 i に対して $\boldsymbol{w}_1^{(i)},\dots,\boldsymbol{w}_{n_i}^{(i)}$ が W_i の基底であるならば $\boldsymbol{w}_j^{(i)}$ $(1\le i\le s,\ 1\le j\le n_i)$ は W の基底である。特に $\dim_K W = \sum_{i=1}^s \dim_K W_i$ が成り立つ。

1.5 内積

ここでは、しばらく実ベクトル空間だけを考える。

V を実ベクトル空間とする。全ての $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}$ が定まっているとする。$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が V の**内積**であるとは、以下の条件をみたすことを言う。

(1) 任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\ge 0$ であり、$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ と $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は同値である。

(2) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$ である。

(3) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$ に対して $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ であ

(4) 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ と $r\in\mathbb{R}$ に対して $(r\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},r\boldsymbol{y})=r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ である。

内積が定義された実ベクトル空間を**内積空間**、あるいは**計量空間**という。

例 1.34. $V=\mathbb{R}^n$ とする。$\boldsymbol{x}=(x_1\ \dots\ x_n),\boldsymbol{y}=(y_1\ \dots\ y_n)\in V$ に対して

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^n x_i y_i$$

と定めると、これは内積となる。これを $\mathbb{R}^n$ の**標準内積**という。また、このとき $\mathbb{R}^n$ を**ユークリッド空間**という。[4]

V を列ベクトルの空間とするとき、内積は

$${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}=(x_1\ \dots\ x_n)\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$

のように表すことが出来る。[5]

内積空間 V に対して

$$||\boldsymbol{x}||=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$$

とおいて、これを $\boldsymbol{x}$ の**ノルム**、あるいは**長さ**という。

命題 1.35. ノルムについて、次が成り立つ。

(1) $||\boldsymbol{x}||\ge 0$ であり、$||\boldsymbol{x}||=0$ と $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は同値である。

(2) $||r\boldsymbol{x}||=|r|\cdot||\boldsymbol{x}||$

(3) $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\le||\boldsymbol{x}||\cdot||\boldsymbol{y}||$ (シュヴァルツの不等式)

[4] 内積は一意的ではない。例えば異なる基底に対する成分表示を用いて内積を定義すれば、それは異なるものとなる。有限次元実ベクトル空間の内積は、適当な基底を用いて成分表示を行えば、標準内積の形となる。

[5] $(1,1)$ 行列をスカラーと同一視する。

(4) $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$ (三角不等式)

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となるとき、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**直交する**といい $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ などとも書く。

$\boldsymbol{0}$ を含まないベクトルの集合 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が**直交系**であるとは、$i \neq j$ のとき $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0$ となることとする。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が**正規直交系**であるとは、それが直交系であって、かつ、全ての i に対して $||\boldsymbol{v}_i|| = 1$ となることとする。すなわち $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$ となることである。正規直交系がベクトル空間 V の基底であるとき、それを**正規直交基底**という。

例 1.36. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において、単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である。

命題 1.37. 有限次元内積空間は正規直交基底をもつ。

Proof. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を内積空間 V の基底とする。$\boldsymbol{v}'_1 = ||\boldsymbol{v}_1||^{-1}\boldsymbol{v}_1$ とする。$\boldsymbol{v}'_1$ は 1 次元空間の正規直交系であり $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{v}'_1 \rangle$ である。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ から正規直交系 $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_k$ が得られ、$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle = \langle \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_k \rangle$ が成り立つものとする。このとき

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}'_i)\boldsymbol{v}'_i$$

とおくと、$1 \leq i \leq k$ について $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}'_i) = 0$ がすぐに分かる。$\boldsymbol{v}'_{k+1} = ||\boldsymbol{w}||^{-1}\boldsymbol{w}$ とおけば $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_k, \boldsymbol{v}'_{k+1}$ は正規直交系で $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+1} \rangle = \langle \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_{k+1} \rangle$ をみたす。

これを繰り返せば $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ は V の正規直交基底である。 □

上の方法で有限次元内積空間の正規直交基底を求める方法を**グラム-シュミットの直交化法**という。

$\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x}^{\perp} = \{\boldsymbol{y} \in V \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}$$

とおく。また V の部分空間 W に対して

$$W^{\perp} = \bigcap_{\boldsymbol{x} \in W} \boldsymbol{x}^{\perp} = \{\boldsymbol{y} \in V \mid \text{任意の } \boldsymbol{x} \in W \text{ に対して } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\}$$

とおく。$\boldsymbol{x}^{\perp}, W^{\perp}$ は V の部分空間になる。

命題 1.38. 有限次元内積空間 V とその部分空間 W について $V = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つ。特に $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$ である。

$W^{\perp}$ を W の**直交補空間**という。

例 1.39. T を n 次直交行列とする。すなわち $T{}^tT = {}^tTT = E$ なるものとする。T を列ベクトル表記を用いて $T = (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)$ と表す。このとき ${}^tTT = E_n$ より、その (i,j) 成分を比べて

$$\delta_{ij} = {}^t\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_j = (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$$

となる。したがって $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となる。

逆に正規直交基底を列ベクトルとして並べた行列は直交行列である。

行ベクトル表示を用いても同様のことが示され、直交行列の行ベクトルの集合は正規直交基底となる。

例 1.40. T を n 次直交行列とする。このとき、任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して $(T\boldsymbol{x}, T\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である。特に $||T\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$ が成り立つ。

これまで、内積については実ベクトル空間を考えてきたが、複素ベクトル空間ではやや修正が必要になる。V を複素ベクトル空間とする。全ての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{C}$ が定まっているとする。$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が V の**(エルミート) 内積**であるとは、以下の条件をみたすことを言う。

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ かつ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ であり、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ と $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は同値である。

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$ である。

(3) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ である。

(4) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $c \in \mathbb{C}$ に対して $(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ である。

例 **1.41.** $V = \mathbb{C}^n$ のとき $\boldsymbol{x} = (x_1 \ \dots \ x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1 \ \dots \ y_n) \in V$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

と定めると、これは内積となる。これを $\mathbb{C}^n$ の**標準内積**という。

エルミート内積を用いて、複素内積空間においても、実内積空間と同様のことが成り立つ。直交行列に対応する複素行列は、ユニタリー行列となる。すなわち $UU^* = U^*U = E$ なるものである。ここで $U^* = {}^t\overline{U}$ は U の随伴行列である。ユニタリー行列の列 (行) ベクトルの集合は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となる。

1.6 線形写像

V, W を K-ベクトル空間とする。写像 $f : V \to W$ が次の条件をみたすとき、**(K-) 線形写像**、または**一次写像**、という。

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$ が成り立つ。

(2) $\boldsymbol{a} \in V$ と $k \in K$ に対して $f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a})$ が成り立つ。

f が線形であるとき、

$$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \quad f(-\boldsymbol{a}) = -f(\boldsymbol{a})$$

なども成り立つ。

$V = W$ のとき線形写像 (一次写像) を**線形変換** (一次変換) ともいう。

線形写像を考えるときには、ベクトル空間が有限次元である必要はないが、ここでは考えるベクトル空間は有限次元であると仮定する。

$f : V \to W$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底、$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ を W の基底とする。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m \\ &\cdots \\ f(\boldsymbol{v}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m \end{aligned}$$

とする。$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\boldsymbol{v}_i)$$

であるから、すべての $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{v})$ は $f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)$ によって決定される。(m, n) 行列 $A_f = (a_{ij})$ を考える。$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ を、その成分表示を考え、${}^t(a_1 \ \dots \ a_n)$ と見る。このとき写像 f は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto A_f \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \left[(\boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto (\boldsymbol{w}_1 \dots \boldsymbol{w}_m) A_f \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right]$$

と表される。ここで $f(\boldsymbol{v})$ は W の元であるが、これも成分表示を考え、$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{m} b_i \boldsymbol{w}_i$ を ${}^t(b_1 \ \dots \ b_m)$ と見ている。A_f を写像 f の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m$ による**行列表示**、または**表現行列**という。

これとは逆に (m, n) 行列 A が与えられると、上のようにして n 次元空間から m 次元空間への線形写像が得られる。これを A の定める線形写像という。

例 **1.42.** 線形写像 $f : V \to W$, $g : W \to U$ とその合成写像 $g \circ f : V \to U$ を考える。その行列表示に対して

$$A_{g \circ f} = A_g A_f$$

が成り立つ。

線形写像の表現行列は基底の取り方に依存するので、基底を変えたときの変化を見る。$f : V \to W$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ を V の基底、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ と $\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_m$ を W の基底とする。基底の変換行列を、それぞれ P, Q とする。すなわち $(\boldsymbol{v}'_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)P$, $(\boldsymbol{w}'_1\ \ldots\ \boldsymbol{w}'_m) = (\boldsymbol{w}_1\ \ldots\ \boldsymbol{w}_m)Q$ とする。f は $(\boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ を $(\boldsymbol{w}_1\ \ldots\ \boldsymbol{w}_m)A_f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に移す。したがって

$$
\begin{aligned}
& (\boldsymbol{v}'_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}'_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)P\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
\mapsto \quad & (\boldsymbol{w}_1\ \ldots\ \boldsymbol{w}_m)A_fP\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}'_1\ \ldots\ \boldsymbol{w}'_m)Q^{-1}A_fP\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となり、すなわち f の基底 $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ と $\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_m$ に関する表現行列は $Q^{-1}A_fP$ となる。$V = W$ のとき、すなわち $f : V \to V$ を考えるときは、基底の変換行列を P として $P^{-1}A_fP$ が f の表現行列となる。一般に、正方行列 A, B に対して $B = P^{-1}AP$ となる正則行列 P が存在するとき、A と B は**相似**であるという。相似であるという関係は n 次正方行列全体の集合の上の同値関係である。

線形変換 $f : V \to V$ を考える。V の部分空間 W について

- $\boldsymbol{w} \in W$ ならば $f(\boldsymbol{w}) \in W$

が成り立つとき、W を **f-不変な部分空間**という。V を有限次元と仮定し、適当な基底を与えれば $V = K^n$ と見ることができ、標準基底を用いて f の行列表示 A を考えることができる。このとき V の部分空間 W が f-不変であることは

- $\boldsymbol{w} \in W$ ならば $A\boldsymbol{w} \in W$

と表現される。一般に n 次正方行列 A に対して、K^n の部分空間 W が **A-不変**であるということを、この条件で定義する。

$f : V \to V$ とし W を f-不変な V の部分空間とする。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を W の基底とし、それを延長して $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底になるようにする。W は f-不変なので $1 \leq j \leq r$ に対しては

$$
f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i
$$

と表される。したがって、この基底に関する f の表現行列は

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array}\right)
$$

となる。$V = W_1 \oplus W_2$ で W_1, W_2 がともに f-不変であるならば、W_1 と W_2 の基底を併せて V の基底を作ることによって、その表現行列は

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc}
a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{array}\right)
$$

となる。

2　固有値と固有ベクトル

この節では A を K 上の n 次正方行列とする。

ある $\mathbf{0}$ でない n 次元列ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\lambda \in K$ があって

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

となるとき、λ を A の**固有値**、$\boldsymbol{v}$ を固有値 λ に対する**固有ベクトル**という。

命題 2.1. K 上の n 次正方行列 A と $\lambda \in K$ に対して

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in K^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v} \in K^n \mid (\lambda E - A)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\}$$

とおくと、これは K^n の部分空間である。

A の固有値 λ に対して命題 2.1 の $V(\lambda)$ を λ に対する**固有空間**という。

λ を A の固有値とする。斉次連立一次方程式

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

は λ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を自明でない解としてもつ。したがって $|\lambda E - A| = 0$ である。$|xE - A| = 0$ を x に関する方程式と見ると λ はその解である。逆に $|xE - A| = 0$ の解 μ に対して $|\mu E - A| = 0$ であるから、方程式 $(\mu E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は自明でない解をもち、従って μ は A の固有値となる。したがって A の固有値は方程式 $|xE - A| = 0$ の解と一致し、特にそれは高々 n 個しか存在しない。

正方行列 A に対して $|xE - A|$ を A の**固有多項式**といい $f_A(x)$ で表す。$f_A(x) = 0$ を A の**固有方程式**という。

例 2.2. n 次上 (下) 三角行列 $A = (a_{ij})$ の固有多項式は $f_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$ であり、固有値は $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ である。

命題 2.3. $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ を A の相異なる固有値とする。このとき $\sum_{i=1}^{s} V(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{s} V(\lambda_i)$ が成り立つ。

Proof. 固有ベクトルが他の固有値に対する固有ベクトルの一次結合で表すことが出来ないことを示せばよい。$1 \leq i \leq s$ について、$\boldsymbol{v}_i$ を λ_i に対する固有ベクトルとする。s に関する帰納法で示す。$s = 1$ のときは自明である。$s \geq 2$ とし $\boldsymbol{v}_s = \sum_{i=1}^{s-1} a_i \boldsymbol{v}_i$ とする。このとき

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v}_s &= \lambda_s \boldsymbol{v}_s = \sum_{i=1}^{s-1} a_i \lambda_s \boldsymbol{v}_i \\ A\boldsymbol{v}_s &= A\left(\sum_{i=1}^{s-1} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{s-1} a_i A\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{s-1} a_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

である。よって $\sum_{i=1}^{s-1} a_i \lambda_s \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{s-1} a_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ であるが帰納法の仮定から $\sum_{i=1}^{s-1} V(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{s-1} V(\lambda_i)$ なので $a_i \lambda_s = a_i \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, s-1)$ となる。$\lambda_s \neq \lambda_i$ なので $a_i = 0$ となる。したがって $\boldsymbol{v}_s = \mathbf{0}$ となり、$\boldsymbol{v}_s$ が固有ベクトルであることに矛盾する。

$\boldsymbol{v}_s$ 以外の場合も同様である。 □

例 2.4. A を正方行列、P を正則行列とする。このとき $|xE - P^{-1}AP| = |P^{-1}(xE - A)P| = |P|^{-1}|xE - A| \cdot |P| = |xE - A|$ なので、A と $P^{-1}AP$ の固有多項式は一致する。したがってその固有値も固有方程式の根としての重複度も含めて一致する。

3　行列の対角化

この節では A を $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列とする。A が実行列であり、A のすべての固有値が実数であるならば $\mathbb{R}$ 上でも同様の議論が出来る。

$\lambda_1 \ldots, \lambda_s$ を A の相異なる固有値の全てであるとする。このとき、命題 2.3 より $\sum_{j=1}^{s} V(\lambda_j) = \bigoplus_{j=1}^{s} V(\lambda_j)$ となるが、$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{s} V(\lambda_j)$ であると仮定しよう。このとき、各 $V(\lambda_j)$ の基底をとり、その和集合を考えれば、それは $\mathbb{C}^n$ の基底となる。すなわち、A のある固有値に対する固有ベクトルのみからなる $\mathbb{C}^n$ の基底をと

ることができる。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をそのような基底とし、$\boldsymbol{v}_i$ に対する固有値を μ_i とする。また $P = (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)$ とおくと、P は正則である。このとき

$$\begin{aligned} AP &= A(\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n) = (A\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ A\boldsymbol{v}_n) = (\mu_1 \boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \mu_n \boldsymbol{v}_n) \\ &= (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、したがって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

となる。すなわち、A は P によって対角化される。このようなとき A は**対角化可能**であるという。

A が対角化可能であるとしよう。正則行列 P があって $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ である。$\boldsymbol{e}_i$ を i 成分だけが 1 である単位列ベクトルとする。このとき $P^{-1}AP\boldsymbol{e}_i = \mu_i \boldsymbol{e}_i$ なので $A(P\boldsymbol{e}_i) = \mu_i(P\boldsymbol{e}_i)$ となる。したがって $P\boldsymbol{e}_i$ は A の固有値 μ_i に対する固有ベクトルである。$P\boldsymbol{e}_1, \ldots, P\boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の基底となるので $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^s V(\lambda_i)$ が成り立つ。

定理 3.1. A を $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列とし、$\lambda_1 \ldots, \lambda_s$ を A の相異なる固有値の全てであるとする。$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^s V(\lambda_i)$ であることと A が対角化可能であることは同値である。

4 対称行列と正規行列

A を複素正方行列とする。A の随伴行列とは $A^* = {}^t\overline{A}$ で定義されるものであった。$AA^* = A^*A$ が成り立つとき、A を**正規行列**という。

例 4.1. 対称行列、エルミート行列、直交行列、ユニタリー行列は、すべて正規行列である。

この節では次の定理を証明する。

定理 4.2 (Toeplitz)**.** 正方行列 A がユニタリー行列によって対角化可能であることと A が正規行列であることは必要十分である。

正規行列 A が実行列で、その固有値もすべて実数であるならば、すべての議論は実数の範囲でなされるので、対角化は直交行列によってなされる。例えば、実対称行列は直交行列によって対角化される。

Proof of 定理 4.2. A がユニタリー行列 U によって対角化されるとする。$U^*AU = D$ で D は対角行列である。このとき

$$AA^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^* = UD^*DU^* = UD^*U^*UDU^* = A^*A$$

である。したがって A は正規行列である。

A を n 次正規行列とする。n に関する帰納法で A がユニタリー行列によって対角化されることを示す。λ を A の一つの固有値とする。$V(\lambda)$ は A-不変な部分空間である。$V(\lambda)^\perp$ は A^*-不変となる。なぜならば $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ と $\boldsymbol{w} \in V(\lambda)^\perp$ に対して

$$(\boldsymbol{v}, A^*\boldsymbol{w}) = {}^t\overline{\boldsymbol{v}}A^*\boldsymbol{w} = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

だからである。また $V(\lambda)$ は A^*-不変でもある。なぜならば $\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ に対して $AA^*\boldsymbol{v} = A^*A\boldsymbol{v} = \lambda A^*\boldsymbol{v}$ だから $A^*\boldsymbol{v} \in V(\lambda)$ である。上と同様に $V(\lambda)^\perp$ は A-不変となる。

$V(\lambda)$ の正規直交基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ とし、$V(\lambda)^\perp$ の正規直交基底を $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とする。このとき $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となる。$U = (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)$ とおけば、これはユニタリー行列で、

$$U^{-1}AU = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & & \ldots & \\ & & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & & & \\ & \ldots & & & A' & \\ 0 & \ldots & 0 & & & \end{array}\right)$$

である。A' はまた正規行列となるので、帰納法の仮定からユニタリー行列で対角化される。したがって A はユニタリー行列で対角化される。 □

命題 4.3. エルミート行列 (対称行列) の固有値は実数である。

Proof. A をエルミート行列、λ を A の固有値、$\boldsymbol{v}$ をその固有ベクトルとする。このとき

$$\overline{\lambda}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = {}^t\overline{\boldsymbol{v}}A^*\boldsymbol{v} = {}^t\overline{\boldsymbol{v}}A\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v},A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v},\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$$

となり、$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) > 0$ なので $\lambda = \overline{\lambda}$ である。 □

命題 4.4. 正規行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。

Proof. 定理 4.2 によって得られるユニタリー行列を $U = (\boldsymbol{v}_1 \ldots \boldsymbol{v}_n)$ とする。各 $\boldsymbol{v}_i$ はある固有値に対する固有ベクトルである。等しい固有値に対する固有ベクトルで張られる空間は固有空間の部分空間となるが、次元を比べれば固有空間に一致する。$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が正規直交基底であることから、異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する。 □

正規行列は対角化可能なので、$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} V(\lambda_i)$ が成り立っているが、上の命題より、これらの部分空間は互いに直交している。したがって、各 $V(\lambda_i)$ に対する正規直交基底を求め、それらを併せることによって $\mathbb{C}^n$ の基底を作れば、それは $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となり、それを並べて得られるユニタリー行列が A を対角化するものとなる。

5 行列の三角化

前の節で、実対称行列はある直交行列によって対角化されることを見たが、一般の行列が対角化可能であるわけではない。例えば $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して、それを対角化する正方行列 P が存在したとすれば、$P^{-1}AP$ と A の固有値が一致すること、三角行列の固有値はその対角成分で与えられること、から $P^{-1}AP = O$ となる。しかし、これは $A = O$ を意味し、矛盾である。したがって A は対角化可能ではない。

このように、一般の行列は対角化は出来ないが、三角行列に変形することはできる。

命題 5.1. 正方行列 A に対して $P^{-1}AP$ が上 (下) 三角行列となるような正則行列 P が存在する。

Proof. λ_1 を A の固有値とし、$\boldsymbol{v}_1$ をその固有ベクトルとする。$\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が K^n の基底となるようにとる。$P_1 = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)$ とおくと P_1 は正則である。

$$\begin{aligned} AP_1 &= (A\boldsymbol{v}_1\ A\boldsymbol{v}_2\ \ldots\ A\boldsymbol{v}_n) = (\lambda_1\boldsymbol{v}_1\ A\boldsymbol{v}_2\ \ldots\ A\boldsymbol{v}_n) \\ &= (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ldots\ \boldsymbol{v}_n)\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{array}\right) = P_1\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \end{aligned}$$

となるので $P_1{}^{-1}AP_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ である。A_2 の固有値 λ_2 をとり、同様にして $Q_2{}^{-1}A_2Q_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_2 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_3 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ となる Q_2 をとることができる。$P_2 = P_1\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & Q_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ とおけば $P_2{}^{-1}AP_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \ldots & * \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$ である。同様に繰り返せば A は三角化される。

下三角行列を得たければ、${}^tA$ に同様の操作を行い、最後に転置行列をとればよい。 □

この方法で得られる三角行列の対角成分は、もちろん元の行列の固有値であるが、作り方から、その並ぶ順番は自由に指定することができることが分かる。また、証明では一つずつ三角部分を作っていったが、実際に計算するときには、いくつかの固有ベクトルが得られるならば、それを延長して基底を作ることによって、一度にいくつかの三角部分を作ることができる。

例 5.2 (Frobenius)**.** A を正方行列、λ を A の固有値、$\boldsymbol{v}$ を λ に対する固有ベクトルとする。また $f(x)$ を多項式とする。このとき $f(\lambda)$ は $f(A)$ の固有値で、$\boldsymbol{v}$ は $f(\lambda)$ に対する固有ベクトルである。

例 5.3. n 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$ の固有値を求める。J を全ての成分が 1 である行列とすると、その固有方程式は $x^{n-1}(x-n)$ であるから、固有値は n と 0 (重複度 $n-1$) である。$A = (a-b)E + bJ$ と表されるので、その固有値は $a - b + bn$ と $a - b$ (重複度 $n - 1$) である。

例 5.4. 正方行列 A がある自然数 m に対して $A^m = O$ となるとき A を**べき零行列**という。このとき λ を A の固有値とすれば $\lambda^m = 0$ となるので $\lambda = 0$ である。すなわち、べき零行列の固有値はすべて 0 である。

例 5.5. 正方行列 A が $A^2 = A$ をみたすとき A を**べき等行列**という。このとき λ を A の固有値とすれば $\lambda^2 - \lambda = 0$ となるので $\lambda = 0, 1$ である。すなわち、べき等行列の固有値はすべて 0 または 1 である。

6 Cayley-Hamilton の定理

次の定理を証明する。

定理 6.1 (Cayley-Hamilton)**.** A を n 次正方行列とする。固有多項式 $f_A(x)$ に対して $f_A(A) = O$ が成り立つ。

Proof. $P^{-1}AP$ が上三角行列となる正則行列 P を考える。このとき $f_A(P^{-1}AP) = P^{-1}f_A(A)P$ であるから $f_A(A) = O$ と $f_A(P^{-1}AP) = O$ は同値である。また A と $P^{-1}AP$ の固有多項式は一致する。したがって A は上三角行列であるとして構わない。A の n 個の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする (同じものが含まれていても構わない)。

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とする。

A の固有多項式は $f_A(x) = (x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$ である。よって

$$\begin{aligned} f_A(A) &= (A - \lambda_1 E)\dots(A - \lambda_n E) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda_n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。ここで、この式の k 番目までの積の初めの k 列の成分がすべて 0 になることを k に関する帰納法で示す。明らかに $k = 1$ では正しい。$k - 1$ まで正しいとすると、k 番目までの積は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \dots & 0 & \\ & \dots & & * \\ 0 & \dots & 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 - \lambda_k & & * & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{k-1} - \lambda_k & & & \\ \hline & & & 0 & & * \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n - \lambda_k \end{array}\right)$$

となり、k 列までの成分がすべて 0 であることが分かる。$k = n$ のときを考えれば $f_A(A) = O$ である。 □

例 6.2. 例 5.4 でべき零行列の固有値はすべて 0 であることを見た。逆にすべての固有値が 0 である n 次正方行列 A はべき零であり、$A^n = O$ であることが定理 6.1 から分かる。

7 広義固有空間

A を正方行列とし、その固有値を $\lambda_1, \dots \lambda_s$ とする。各固有値に対して、固有空間

$$V(\lambda_i) = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda_i \boldsymbol{x}\}$$

を定義すると $\sum_{i=1}^{s} V(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^{s} V(\lambda_i)$ であることを見た。これが K^n に一致すれば行列 A は対角化できるが、一般にはそうではない。固有空間では足りないのである。

正方行列 A の固有値 λ と自然数 t に対して、

$$V_t(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid (\lambda E - A)^t \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

とおく。$V_1(\lambda) = V(\lambda)$ である。また

$$V_1(\lambda) \subset V_2(\lambda) \subset \dots$$

であることは明らかである。また $V_t(\lambda)$ は K^n の部分空間であり、K^n の次元の有限性から、この上昇列は止まる。すなわち、ある t に対して $V_t(\lambda) = V_{t+1}(\lambda) = \dots$ となる。このとき $V_\infty(\lambda) = V_t(\lambda)$ とおいて、これを λ に対する**広義固有空間**という。

次の定理を示すことがこの節の目標である。

定理 7.1. A を n 次複素正方行列とし、$\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_s$ をその異なる固有値とする。また m_i を λ_i の固有方程式の解としての重複度とする。このとき次が成り立つ。

(1) $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} V_\infty(\lambda_i)$

(2) $\dim V_\infty(\lambda_i) = m_i$

(3) $V_\infty(\lambda_i) = V_{m_i}(\lambda_i)$

(固有値が全て実数であるならば、同様のことが実ベクトル空間でも成り立つ。)

これを示すためにいくつかの準備をする。まず、次の命題を証明なしに用いる。

命題 7.2 (代数学の基本定理)**.** 任意の複素係数の一変数多項式は一次式の積に分解する。

これは「任意の複素係数一変数方程式は複素数の範囲で解をもつ」という命題と同値になる。これによって、n 次正方行列の固有方程式は重複度を込めれば n 個の解をもつことになる。定理 7.1 で係数体を複素数と仮定したのはこのためであり、解が実数ならば実数係数で同じことが言える。

補題 7.3. $f_1(x), \dots, f_s(x)$ を全体として共通の因子をもたない多項式とする。このとき、ある多項式 $g_1(x), \dots, g_s(x)$ が存在して

$$f_1(x)g_1(x) + \dots + f_s(x)g_s(x) = 1$$

となる。

Proof. $I = \{f_1(x)g_1(x) + \dots + f_s(x)g_s(x) \mid g_1(x), \dots, g_s(x) \in K[x]\}$ とおく。$I \neq \emptyset$ で、I は次の性質をもつことがすぐに分かる[6]。

- $a(x), b(x) \in I$ ならば $a(x) + b(x) \in I$ である。
- $a(x) \in I$ と任意の多項式 $c(x)$ に対して $a(x)c(x) \in I$ である。

I に含まれる 0 でない多項式のうち、次数最小のものを $h(x)$ とする。I に含まれる任意の多項式が $h(x)$ で割り切れることを示す。

$a(x) \in I$ とする。$a(x)$ を $h(x)$ で割って

$$a(x) = q(x)h(x) + r(x)$$

と表すと、$r(x)$ はその次数が $h(x)$ の次数より小さい。$r(x) = a(x) - q(x)h(x)$ で $a(x), h(x) \in I$ なので、上で見た性質から $r(x) \in I$ となる。しかし $h(x)$ の次数の最小性から $r(x) = 0$ となる。これは $a(x)$ が $h(x)$ で割り切れることを意味する。

$f_1(x), \dots, f_s(x) \in I$ であるが、仮定からその全てを割り切る多項式はないので、$h(x)$ は定数となる。したがって $1 \in I$ が示される。 □

[6]代数学の言葉を使えば、これは I がイデアルであることを意味している。

補題 7.4. 正方行列 A の固有方程式 $f_A(x) = 0$ において、固有値 λ がその m 重根であるとき、$\dim_{\mathbb{C}} V_\infty(\lambda) \geq m$ である。

Proof. はじめから A は上三角行列と仮定してよい。また対角成分には、はじめの m 個に λ が現れていると仮定してよい。$\lambda E - A$ のはじめの m 次の主小行列を N とする。N は対角成分が 0 の上三角行列である。N の固有値は 0 のみなので、例 6.2 から $N^m = O$ である。したがって $(\lambda E - A)^m$ のはじめの m 列の成分はすべて 0 である。よって $\boldsymbol{x} = {}^t(a_1\ a_2\ \ldots\ a_m\ 0\ \ldots\ 0)$ に対して $(\lambda E - A)^m \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり、$\dim_{\mathbb{C}} V_\infty(\lambda) \geq m$ となる。 □

補題 7.5. $\sum_{i=1}^s V_\infty(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^s V_\infty(\lambda_i)$ が成り立つ。

Proof. $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in V_\infty(\lambda_i) \cap \sum_{j\neq i} V_\infty(\lambda_j)$ とする。$\boldsymbol{x} = \sum_{j\neq i} \boldsymbol{y}_j$, $\boldsymbol{y}_j \in V_\infty(\lambda_j)$ と表すことができる。$(\lambda_i E - A)^{m-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $(\lambda_i E - A)^m \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる自然数 m が存在する。このとき $(\lambda_i E - A)^{m-1}\boldsymbol{x} \in V(\lambda_i)$ であることに注意しておく。$j \neq i$ についても $(\lambda_j E - A)^{m_j} \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{0}$ なる m_j が存在する。このとき

$$
\begin{aligned}
(\lambda_i E - A)^{m-1}\left(\prod_{j\neq i}(\lambda_j E - A)^{m_j}\right)\boldsymbol{x} &= (\lambda_i E - A)^{m-1}\left(\prod_{j\neq i}(\lambda_j E - A)^{m_j}\right)\left(\sum_{\ell\neq i}\boldsymbol{y}_\ell\right) \\
&= (\lambda_i E - A)^{m-1}\sum_{\ell\neq i}\left(\prod_{j\neq i}(\lambda_j E - A)^{m_j}\right)\boldsymbol{y}_\ell = \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

である。また左辺は

$$
(\lambda_i E - A)^{m-1}\left(\prod_{j\neq i}(\lambda_j E - A)^{m_j}\right)\boldsymbol{x} = \left(\prod_{j\neq i}(\lambda_j - \lambda_i)^{m_j}\right)(\lambda_i E - A)^{m-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}
$$

である。これは矛盾なので $V_\infty(\lambda_i) \cap \sum_{j\neq i} V_\infty(\lambda_j) = 0$ である。 □

定理 7.1 を証明しよう。

Proof of 定理 *7.1.* 命題 7.2 より、固有多項式は 1 次式の積に分解する。$f_A(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$ とする。ただし $i \neq j$ のとき $\lambda_i \neq \lambda_j$ である。ここで $f_i(x) = f_A(x)/(x - \lambda_i)^{m_i}$ とおく。すると $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ は共通の因子をもたない。補題 7.3 より $\sum_{i=1}^s f_i(x) g_i(x) = 1$ となる多項式 $g_1(x), \ldots, g_s(x)$ がある。A を代入すれば $\sum_{i=1}^s f_i(A) g_i(A) = E$ である。$A_i = f_i(A) g_i(A)$ とおく。$\sum_{i=1}^s A_i = E$ である。また $i \neq j$ に対して $f_i(x) f_j(x)$ は $f_A(x)$ で割り切れるので、Cayley-Hamilton の定理から $A_i A_j = O$ となる。また

$$
A_i = A_i E = A_i(A_1 + \cdots + A_s) = {A_i}^2
$$

である。

$V_i = A_i \mathbb{C}^n$ とおく。$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^s V_i$ であることを示す。$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$
\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^s A_i \boldsymbol{x} \in \sum_{i=1}^s V_i
$$

であるから $\mathbb{C}^n = \sum_{i=1}^s V_i$ が成り立つ。$\boldsymbol{x} \in V_i \cap \sum_{j\neq i} V_j$ とすると

$$
\boldsymbol{x} = A_i \boldsymbol{y} = \sum_{j\neq i} A_j \boldsymbol{z}_j
$$

となる $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}_j$ $(j \neq i)$ が存在する。このとき

$$
\boldsymbol{x} = A_i \boldsymbol{y} = A_i A_i \boldsymbol{y} = A_i \boldsymbol{x} = A_i \sum_{j\neq i} A_j \boldsymbol{z}_j = \sum_{j\neq i} A_i A_j \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{0}
$$

となる。したがって $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^s V_i$ である。

$V_i = V_\infty(\lambda_i)$ であることを示す。$A_i = f_i(A) g_i(A)$ であったから、$f_i(x)$ の定義から $(\lambda_i E - A)^{m_i} A_i = O$ である。よって $V_i \subset V_\infty(\lambda_i)$ である。補題 7.5 より

$$
\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^s V_i \subset \sum_{i=1}^s V_\infty(\lambda_i) = \bigoplus_{i=1}^s V_\infty(\lambda_i) \subset \mathbb{C}^n
$$

となり $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^s V_\infty(\lambda_i)$ である。次元を比べれば $V_i = V_\infty(\lambda_i)$ となる。補題 7.4 より $\dim V_i = n_i$ も成り立つ。 □

8　べき零行列の標準化

N をべき零な n 次正方行列とし $N^\ell = O,\ N^{\ell-1} \neq O$ とする。N の固有値は 0 だけなので $V_i = V_i(0)$ とおく。

$$\mathbb{C}^n = V_\ell \supset V_{\ell-1} \supset \cdots \supset V_1 \supset V_0 = 0$$

である。$m_i = \dim V_i,\ r_i = m_i - m_{i-1}$ とおく。

補題 8.1. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_{k-1}}$ を V_{k-1} の基底とし、その延長となる V_k の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_{k-1}}, \boldsymbol{v}_{m_{k-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_k}$ とする。このとき $N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+1}, \ldots, N\boldsymbol{v}_{m_k} \in V_{k-1}$ で、これらは一次独立である。また $\langle N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+1}, \ldots, N\boldsymbol{v}_{m_k} \rangle \cap V_{k-2} = 0$ である。

Proof. $N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+1}, \ldots, N\boldsymbol{v}_{m_k} \in V_{k-1}$ は明らかである。これらが一次独立であることを示そう。$\sum_{i=1}^{r_k} c_i N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i} = \boldsymbol{0}$ とする。

$$\boldsymbol{0} = N^{k-2}\left(\sum_{i=1}^{r_k} c_i N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i}\right) = N^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{r_k} c_i \boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i}\right)$$

となるから $\sum_{i=1}^{r_k} c_i \boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i} \in V_{k-1}$ であるが、$\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{m_k}$ の取り方から $\sum_{i=1}^{r_k} c_i \boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i} = \boldsymbol{0}$ であり、$\{\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i}\}$ の一次独立性から $c_1 = \cdots = c_{r_k} = 0$ である。

次に $\langle N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+1}, \ldots, N\boldsymbol{v}_{m_k} \rangle \cap V_{k-2} = 0$ を示す。$\sum_{i=1}^{r_k} c_i N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i} \in \langle N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+1}, \ldots, N\boldsymbol{v}_{m_k} \rangle \cap V_{k-2}$ とする。

$$N^{k-1}\left(\sum_{i=1}^{r_k} c_i \boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i}\right) = N^{k-2}\left(\sum_{i=1}^{r_k} c_i N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i}\right) = \boldsymbol{0}$$

となり、上と同様の議論で $c_1 = \cdots = c_{r_k} = 0$ となり、よって $\sum_{i=1}^{r_k} c_i N\boldsymbol{v}_{m_{k-1}+i} = \boldsymbol{0}$ である。 □

- $V_{\ell-1}$ の基底に $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{r_\ell}$ を付け加えて V_ℓ の基底になるようにする。

補題 8.1 より $N\boldsymbol{a}_1, \ldots, N\boldsymbol{a}_{r_\ell}$ は一次独立で $\langle N\boldsymbol{a}_1, \ldots, N\boldsymbol{a}_{r_\ell} \rangle \cap V_{\ell-1} = 0$ となる。

- $\langle N\boldsymbol{a}_1, \ldots, N\boldsymbol{a}_{r_\ell} \rangle \oplus V_{\ell-2}$ の基底に $r_{\ell-1} - r_\ell$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_{r_\ell+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{r_{\ell-1}}$ を付け加えて $V_{\ell-1}$ の基底になるようにする。

<table>
<tr><td>$\boldsymbol{a}_1$</td><td>$\ldots$</td><td>$\boldsymbol{a}_{r_\ell}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$N\boldsymbol{a}_1$</td><td>$\ldots$</td><td>$N\boldsymbol{a}_{r_\ell}$</td><td>$\boldsymbol{a}_{r_\ell+1}$</td><td>$\ldots$</td><td>$\boldsymbol{a}_{r_{\ell-1}}$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$V_{\ell-2}$</td></tr>
</table>

以下、同様に繰り返して

$$N^k \boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1}, \ldots, N^k \boldsymbol{a}_{r_i}, \quad (1 \leq i \leq \ell,\ 0 \leq k \leq i-1)$$

は $\mathbb{C}^n$ の基底となる。

$\langle N^{i-1}\boldsymbol{a}_j, N^{i-2}\boldsymbol{a}_j, \ldots, N\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j \rangle$ は N-不変な部分空間で、この基底によって N を表わせば

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、N はこのような形の行列をいくつか並べたものに相似となる。これをべき零行列の標準形という。

例 8.2. (1) 2 次べき零行列の標準形は次の通り。

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 0 \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 3 次べき零行列の標準形は次の通り。

$$
\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ \hline & 0 & \\ \hline & & 0 \end{array} \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

(3) 4 次べき零行列の標準形は次の通り。

$$
\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} 0 & & & \\ \hline & 0 & & \\ \hline & & 0 & \\ \hline & & & 0 \end{array} \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \hline & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|cc} 0 & & & \\ \hline & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array} \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

べき零行列の標準形は、その並べ方を除いて V_i たちの次元だけで決まるので、その意味で一意的である。

例 8.3. 次のべき零行列を考える。

$$
N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$N^2 = O$ であり、広義固有空間は

$$
V_1 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \mathbb{C}^6
$$

である。これによって考える形は以下の通りであることが分かる。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を決める必要がある。これは V_1 の

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$		

基底を延長して V_2 の基底となるようにすればよいので、例えば

$$
\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

とすればよい。このとき

$$
N\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

である。$\langle N\boldsymbol{a}, N\boldsymbol{b}\angle$ の基底を延長して V_1 の基底となるように $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ を決めればよいので、例えば

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$		
$N\boldsymbol{a}$	$N\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$

$$
\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

とすればよい。

これですべての基底を決めることができたので

$$
P = (N\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a},\ N\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

とおけば

$$
P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}
$$

となる。

9 Jordan 標準形

n 次正方行列 A は、適当な基底をとることによって n 次元ベクトル空間 V の線形変換と見なすことができた。基底を変えれば、線形変換の行列は $P^{-1}AP$ のように変わる。与えられた行列 A に対して、$P^{-1}AP$ と表される、なるべくわかり易い形を求めることを考える。例えば、対称行列のように対角化可能な行列であれば、それを対角化することによって、その固有値や固有ベクトルなどが読み取りやすくなる。一般の行列は対角化されるとは限らないので、まず何を変形の目標とすればよいかを考える必要がある。ここでは複素数を成分とする行列を考えるが、考える行列が実行列で、その固有値も全て実数であるならば、全てのことを実数の範囲で考えることが出来る。

複素数 λ と自然数 n に対して、n 次正方行列 $J(\lambda, n)$ を

$$
J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}
$$

とおく。この形の行列を **Jordan ブロック**という。次が主定理である。

定理 9.1 (Jordan 標準形)**.** 任意の複素正方行列は、いくつかの Jordan ブロックを対角線上に並べた形の行列に相似である。また、そこに現れる Jordan ブロックは、その並べ方を除いて等しい。(この形の行列を行列の **Jordan 標準形**という。)

Proof. A を n 次正方行列とする。$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ を A の相異なる固有値の全てであるとする。このとき $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} V_\infty(\lambda_i)$ であった (定理 7.1)。また、各 $V_\infty(\lambda_i)$ は A-不変な部分空間である。したがって、各 $V_\infty(\lambda_i)$ の基底をとり、それを集めて $\mathbb{C}^n$ の基底を作れば、その基底への変換によって

$$
A \sim \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & & O \\ \hline & \ddots & \\ \hline O & & A_s \end{array} \right)
$$

のように分解する。したがって、各 i について A_i が定理の形に変形できることを示せば、A も定理の形に変形される。

各 A_i について、A_i の固有値は λ_i のみである。$N_i = A_i - \lambda_i E$ とおけば、N_i はべき零である。べき零行列の標準形を考えれば、ある正則行列 P_i があって、$P_i^{-1} N_i P_i$ は $J(0, n_{ij})$ の形の行列を並べたものになる。したがって $P_i^{-1} A_i P_i = P_i^{-1}(\lambda_i E + N_i) P_i = \lambda_i E + P_i^{-1} N_i P_i$ は $J(\lambda_i, n_{ij})$ の形の行列を並べたものになる。

以上を合わせると、A は Jordan ブロックを並べた形の行列と相似である。

べき零行列の標準形が広義固有空間の次元で決まり、それは基底の取り方には依らないので、Jordan ブロックの一意性も示される。 $\square$

系 9.2. 二つの正方行列が相似であるための必要十分条件は、その Jordan 標準形が (Jordan ブロックの並べ方を除いて) 等しいことである。

例 9.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよう。

まず、A は三角行列であるから、その固有値は 1 だけであることがすぐに分かる。$N = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと N はべき零であり $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = O$ である。$i = 1, 2, 3$ に対して、連立方程式 $N^i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いて

$$\begin{aligned} V_1(1) &= \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ V_2(1) &= \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ V_3(1) &= \mathbb{C}^4 \end{aligned}$$

が分かる。次元を見て、Jordan ブロックは $J(1, 3)$ と $J(1, 1)$ になることが分かる。$V_2(1)$ の基底を補う $V_3(1)$ の基底を取ればいいので $\boldsymbol{a} = {}^t(0\ 0\ 0\ 1)$ とする。すると

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad N\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N^2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。$V_1(1)$ の基底を $N^2\boldsymbol{a}$ を補うように取ればいいので $\boldsymbol{b} = {}^t(0\ 3\ -2\ 0)$ とする。$\{N^2\boldsymbol{a}, N\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ を基

$\boldsymbol{a}$	
$N\boldsymbol{a}$	
$N^2\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$

底にすれば、A は標準化される。実際 $P = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ が確認できる。[7]

例 9.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよう。固有値は 1 (重複度 3) と 2 である。

[7] 計算を確認するときには P^{-1} の計算が大変になるので、$AP = PJ$ (J は Jordan 標準形) を確認するとよい。

まず、固有値 2 に対する固有空間を求めて

$$V_1(2) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

$N = A - E$ とおくと

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。$N^i\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解いて $V_i(1)$ を求めると

$$\begin{aligned} V_1(1) &= \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ V_2(1) &= \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ V_3(1) &= \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である (固有値 1 の重複度が 3 なので、3 次元より大きくはならない)。次元を見て、Jordan ブロックは $J(1,3)$ であることが分かる。$\boldsymbol{a} = {}^t(0\ 0\ 1\ 0)$ とおいて

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N^2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とおけば } P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{ が確認できる。}$$

例 9.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよう。固有値は 2 (重複度 4) のみである。

$N = A - 2E$ とおくと $N^2 = O$ である。$N^i\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解いて $V_i(2)$ を求めると

$$\begin{aligned} V_1(2) &= \mathbb{C}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ V_2(2) &= \mathbb{C}^4 \end{aligned}$$

となる。したがって、Jordan ブロックは $J(2,2)$ が二つである。$\boldsymbol{a} = {}^t(1\ 0\ 0\ 0)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(0\ 1\ 0\ 0)$ とおけば $N\boldsymbol{a} = {}^t(0\ 0\ 0\ 1)$, $N\boldsymbol{b} = {}^t(3\ 0\ -1\ -3)$ である。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ とおけば } P^{-1}AP = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{ が確認できる。}$$

9.1 最小多項式

A を n 次正方行列とする。$f(A)=O$ となる $0\neq f(x)\in K[x]$ のうち、次数が最小で最高次の係数が 1 であるものを A の**最小多項式**という。固有多項式 $f_A(x)$ が $f_A(A)=O$ をみたすので、最小多項式は常に存在し、その次数は n 以下である。

命題 9.6. $m(x)$ を A の最小多項式とする。$f(x)\in K[x]$ が $f(A)=O$ をみたすことと $m(x)$ が $f(x)$ を割り切ることは同値である。

Proof. $m(x)$ が $f(x)$ を割り切れば $f(A)=O$ であることは明らかである。

$f(A)=O$ とする。

$$f(x)=q(x)m(x)+r(x),\quad \deg r(x)<\deg m(x)$$

なる $q(x),r(x)\in K[x]$ が存在する。このとき $r(A)=O$ も成り立ち、 $m(x)$ の次数の最小性から $r(x)=0$ である。 □

この命題により最小多項式の一意性が分かる。よってこれを $m_A(x)$ と表すことにする。固有多項式について $f_A(A)=O$ なので、最小多項式は固有多項式の因数である。また A の固有値は最小多項式の根となる。

命題 9.7. 正方行列 A の固有多項式が $f_A(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{e_i}$ であるとき、A の最小多項式は $m_A(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{f_i}$, $1\leq f_i\leq e_i$ $(i=1,\ldots,s)$ と表される。

固有多項式だけではその Jordan 標準形が決定できない場合でも、最小多項式を考えれば Jordan 標準形が決定されるときがある。

例 9.8 (2 次正方行列)**.** A を 2 次正方行列とする。

(1) $f_A(x)=(x-\lambda)(x-\mu)$ $(\lambda\neq\mu)$ のとき 、その Jordan 標準形は $J(\lambda,1)\oplus J(\mu,1)$ である。

(2) $f_A(x)=(x-\lambda)^2$ とする。

  (a) $m_A(x)=(x-\lambda)$ ならば、その Jordan 標準形は $J(\lambda,1)\oplus J(\lambda,1)$ である。

  (b) $m_A(x)=(x-\lambda)^2$ ならば、その Jordan 標準形は $J(\lambda,2)$ である。

例 9.9 (3 次正方行列)**.** A を 3 次正方行列とする。

(1) $f_A(x)=(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)$ (λ, μ, ν は互いに異なる) のとき 、その Jordan 標準形は $J(\lambda,1)\oplus J(\mu,1)\oplus J(\nu,1)$ である。

(2) $f_A(x)=(x-\lambda)^2(x-\mu)$ $(\lambda\neq\mu)$ とする。

  (a) $m_A(x)=(x-\lambda)(x-\mu)$ ならば、その Jordan 標準形は $J(\lambda,1)\oplus J(\lambda,1)\oplus J(\mu,1)$ である。

  (b) $m_A(x)=(x-\lambda)^2(x-\mu)$ ならば、その Jordan 標準形は $J(\lambda,2)\oplus J(\mu,1)$ である。

(3) $f_A(x)=(x-\lambda)^3$ とする。

  (a) $m_A(x)=(x-\lambda)$ ならば、その Jordan 標準形は $J(\lambda,1)\oplus J(\lambda,1)\oplus J(\lambda,1)$ である。

  (b) $m_A(x)=(x-\lambda)^2$ ならば、その Jordan 標準形は $J(\lambda,2)\oplus J(\lambda,1)$ である。

  (c) $m_A(x)=(x-\lambda)^3$ ならば、その Jordan 標準形は $J(\lambda,3)$ である。

4 次以上の正方行列のときは、最小多項式を考えても、一般には Jordan 標準形は決定されない。例えば $J(\lambda,2)\oplus J(\lambda,2)$ と $J(\lambda,2)\oplus J(\lambda,1)\oplus J(\lambda,1)$ についてはいずれも $f_A(x)=(x-\lambda)^4$, $m_A(x)=(x-\lambda)^2$ となる。

最後に一つの命題を紹介する。

命題 9.10. 正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は、最小多項式 $m_A(x)$ が重根をもたないことである。

9.2 計算機による Jordan 標準形の計算

単なる行列計算などは表計算ソフトウェアなどでできるが、Jordan 標準形を求めるには maxima などの数学用ソフトウェアが必要である。ここでは maxima を用いた計算方法を簡単に紹介する。maxima は無料で利用できる。

maxima を起動し、以下のように計算を行う。

```
(%i1) load("diag")$

(%i2) A : matrix([1,2],[0,1]);
                                   [ 1  2 ]
(%o2)                              [      ]
                                   [ 0  1 ]
(%i3) J : jordan(A);
(%o3)                              [[1, 2]]
(%i4) dispJordan(J);
                                   [ 1  1 ]
(%o4)                              [      ]
                                   [ 0  1 ]
(%i5) P: ModeMatrix(A, J);
                                   [ 2  0 ]
(%o5)                              [      ]
                                   [ 0  1 ]
(%i6) invert(P).A.P;
                                   [ 1  1 ]
(%o6)                              [      ]
                                   [ 0  1 ]
```

1 行目は必要なパッケージの読み込みで、一度だけ行えばよい。5 行目は変換のための正則行列を出力させている。6 行目は結果の確認である。`invert` は逆行列、また行列の積は `A.P` のように表す。