

## 線形代数続論・筆答レポート (第一回 2021/06/03)

1. 次の連立方程式を解け。[5 点]

$$\begin{cases} 4a - 8b + 9c + 2d = 19 \\ 3a - 6b + 3c + 9d = 3 \\ -2a + 4b - c - 8d = 1 \end{cases}$$

2. 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$  の逆行列を求めよ。[5 点]

3. 行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$  を求めよ。[5 点]

4.  $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (3, -1, 1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (2, 0, 1, 0)$  とし  $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$  とする。  $V$  の一組の基底を求めよ。またその延長となる  $\mathbb{C}^4$  の基底を求めよ。[5 点]

5.  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$  とする。[5 点 × 3]

(1)  $A$  の固有多項式と固有値を求めよ。

(2) (1) で求めた各固有値に対して、その固有空間の基底をそれぞれ求めよ。

(3)  $A$  が対角化可能であることを判定せよ (その理由も書くこと)。対角化可能であるならば  $P^{-1}AP$  が対角行列となる正則行列  $P$  を求め、そのときの  $P^{-1}AP$  も答えよ。

6.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  とする。[5 点 × 3]

(1)  $A$  の固有多項式と固有値を求めよ。

(2) (1) で求めた各固有値に対して、その固有空間の基底をそれぞれ求めよ。

(3)  $T^{-1}AT$  が対角行列となるような直交行列  $T$  を求め、そのときの  $T^{-1}AT$  も答えよ。

7. 行列  $A$  が正規行列、ユニタリ行列、であることの定義をそれぞれ書け。[5 点]

8.  $n$  次複素正方行列  $A$  があるユニタリ行列によって対角化されるならば  $A$  は正規行列であることを示せ。ただし  $A$  が  $U$  によって対角化されるとは  $U^{-1}AU$  が対角行列となることである。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]