

線形代数続論 2021 年度筆答式レポート第一回解答例

1. $(a, b, c, d) = (-2 + 2s - 5t, s, 3 + 2t, t)$ (s, t は任意の定数)
(解の記述は一意的ではない)

2. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

3. 16

4. 基底 : $(1, -1, 0, -1), (0, 2, 1, 2)$
延長となる基底 : $(1, -1, 0, -1), (0, 2, 1, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$
(解の記述は一意的ではない)

5. (1) 固有多項式 : $x^3 - 14x^2 + 65x - 100 = (x - 5)^2(x - 4)$
固有値 : 5 (2 重根), 4

- (2) 固有値 5 に対して $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 4 に対して $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
(解の記述は一意的ではない)

- (3) 固有空間の次元の和が全体の次元と一致するので対角化可能である。

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ とおけば } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ である。}$$

- (解の記述は一意的ではない)

6. (1) 固有多項式 : $x^3 - 6x^2 + 9x - = x(x - 3)^2$
固有値 : 3 (2 重根), 0

- (2) 固有値 0 に対して $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 3 に対して $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- (3) (2) で求めた基底の直交化を求めて並べればよい。 $T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$$\text{とおけば } T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ である。}$$

- (解の記述は一意的ではない)

7. A が正規行列であるとは $AA^* = A^*A$ が成り立つことである。 A がユニタリ一行列であるとは $AA^* = A^*A = E$ が成り立つことである。ただし $A^* = {}^t\bar{A}$ (転置行列の複素共役) で E は単位行列である。

8. A がユニタリ一行列 U によって対角化されるとする。すなわち $U^{-1}AU = D$ (D は対角行列) である。 $U^{-1} = U^*, A = U^*DU, A^* = (U^*DU)^* = U^*D^*U, DD^* = D^*D$ に注意して

$$AA^* = (U^*DU)(U^*D^*U) = U^*DD^*U = U^*D^*DU = (U^*D^*U)(U^*DU) = A^*A$$

- である。