

# 完全数と関連するお話

花木章秀

信州大学 理学部 理数学生応援プロジェクト 特別講義

2011 年 2 月 1 日

# 完全数とは

- 6 の真の約数は 1, 2, 3 である。
- その和は

$$1 + 2 + 3 = 6$$

となり、元の数 6 と等しい。

- このように真の約数の和が元の数と等しい自然数を**完全数**という。

- 自然数  $n$  に対して、その約数の総和を  $S(n)$  で表す。
- 例えば

$$S(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

である。

- $n$  が完全数であることは  $S(n)/n = 2$  であることと同値である。

$n = 12$  までの  $S(n)$  および  $S(n)/n$  は以下の通りである。

| $n$ | 約数                | $S(n)$ | $S(n)/n$            |                            |
|-----|-------------------|--------|---------------------|----------------------------|
| 1   | 1                 | 1      | 1                   | $< 2$                      |
| 2   | 1, 2              | 3      | $3/2 = 1.5$         | $< 2$                      |
| 3   | 1, 3              | 4      | $4/3 = 1.33\dots$   | $< 2$                      |
| 4   | 1, 2, 4           | 7      | $7/4 = 1.75$        | $< 2$                      |
| 5   | 1, 5              | 6      | $6/5 = 1.2$         | $< 2$                      |
| 6   | 1, 2, 3, 6        | 12     | 2                   | <b><math>= 2</math></b>    |
| 7   | 1, 7              | 8      | $8/7 = 1.14\dots$   | $< 2$                      |
| 8   | 1, 2, 4, 8        | 15     | $15/8 = 1.875$      | $< 2$                      |
| 9   | 1, 3, 9           | 13     | $13/9 = 1.44\dots$  | $< 2$                      |
| 10  | 1, 2, 5, 10       | 18     | $18/10 = 1.8$       | $< 2$                      |
| 11  | 1, 11             | 12     | $12/11 = 1.09\dots$ | $< 2$                      |
| 12  | 1, 2, 3, 4, 6, 12 | 28     | $28/12 = 2.33\dots$ | <b><math>&gt; 2</math></b> |

## 疑問 1

$m \mid n$  ( $m$  が  $n$  の約数) ならば

$$\frac{S(m)}{m} < \frac{S(n)}{n}$$

は正しいか？

- これが正しいければ 6 の倍数はすべて完全数ではない。
- 証明のためには  $S(n)$  をうまく記述しなければならない。
- $n$  の約数をすべて記述する方法が必要である。

- 自然数  $m, n$  の素因数分解を

$$m = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_r^{d_r}$$

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$$

とする。ただし、一方にしか現れない素因数がある場合にも指数を 0 として補う。

- このとき  $m \mid n$  であるための必要十分条件は、すべての  $i$  について  $d_i \leq e_i$  となることである。

## 命題 2

$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$  の約数全体の集合は

$$\{p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_r^{d_r} \mid 0 \leq d_i \leq e_i, i = 1, 2, \dots, r\}$$

で、その個数は  $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_r + 1)$  である。

- $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$  の約数の和  $S(n)$  を求めよう。

$$\begin{aligned}
 S(n) &= \sum_{d_1=0}^{e_1} \sum_{d_2=0}^{e_2} \cdots \sum_{d_r=0}^{e_r} p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_r^{d_r} \\
 &= \sum_{d_1=0}^{e_1} \sum_{d_2=0}^{e_2} \cdots \sum_{d_{r-1}=0}^{e_{r-1}} p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_{r-1}^{d_{r-1}} \sum_{d_r=0}^{e_r} p_r^{d_r} \\
 &= \sum_{d_1=0}^{e_1} \sum_{d_2=0}^{e_2} \cdots \sum_{d_{r-1}=0}^{e_{r-1}} p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_{r-1}^{d_{r-1}} \frac{p_r^{e_r+1} - 1}{p_r - 1} \\
 &= \cdots \\
 &= \frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{e_r+1} - 1}{p_r - 1}
 \end{aligned}$$

### 命題 3

$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$  に対して

$$S(n) = \frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{e_r+1} - 1}{p_r - 1}$$
$$\frac{S(n)}{n} = \frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1^{e_1}(p_1 - 1)} \cdot \frac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2^{e_2}(p_2 - 1)} \cdots \frac{p_r^{e_r+1} - 1}{p_r^{e_r}(p_r - 1)}$$

### 命題 4

$m$  と  $n$  が互いに素であるならば

$$S(mn) = S(m)S(n), \quad \frac{S(mn)}{mn} = \frac{S(m)}{m} \cdot \frac{S(n)}{n}$$

● ここで

$$\frac{p^{e+1} - 1}{p^e(p-1)} = \frac{p^e + p^{e-1} + \cdots + p + 1}{p^e} = 1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{e-1}} + \frac{1}{p^e}$$

であるから、 $e < f$  ならば

$$\frac{S(p^e)}{p^e} = \frac{p^{e+1} - 1}{p^e(p-1)} < \frac{p^{f+1} - 1}{p^f(p-1)} = \frac{S(p^f)}{p^f}$$

が成り立つ。

## 定理 5

$m \mid n$  ならば  $S(m)/m < S(n)/n$  である。

- $S(n)/n < 2$  のとき  $n$  を**不足数**という。
- $S(n)/n > 2$  のとき  $n$  を**過剰数**という。

## 命題 6

- 1 不足数の約数は不足数である。
- 2 過剰数の倍数は過剰数である。
- 3 完全数の真の約数は不足数である。
- 4 完全数の真の倍数は過剰数である。

## 偶数の完全数

- 6 の次の完全数はいくつだろう。
- 手計算で求めるのは簡単ではないが、

6, 28, 496, 8128, …

となる。

- これらの数の素因数分解は

$$6 = 2 \times 3 = 2^1 \times 3$$

$$28 = 4 \times 7 = 2^2 \times 7$$

$$496 = 16 \times 31 = 2^4 \times 31$$

$$8128 = 64 \times 127 = 2^6 \times 127$$

である。

- これらの完全数は

$$2^{a-1}(2^a - 1)$$

の形をしていることが分かる。

- 抜けている部分は、この例では  $a = 3, 5$  の場合で、このとき

$$2^{4-1}(2^4 - 1) = 2^3 \times 15 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$2^{6-1}(2^6 - 1) = 2^5 \times 63 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

である。

- $2^a - 1$  が素数でなくてはならないことが想像される。
- $2^e - 1$  の形の素数をメルセンヌ素数という。
- $2^e - 1$  が素数ならば  $e$  は素数でなくてはならない。しかし  $e$  が素数であっても  $2^e - 1$  が素数とは限らない。

## 定理 7

$2^e - 1$  が素数であるとき  $2^{e-1}(2^e - 1)$  は完全数である。

Proof.

$$\frac{S(2^{e-1}(2^e - 1))}{2^{e-1}(2^e - 1)} = \frac{2^e - 1}{2^{e-1}(2^e - 1)} \cdot \frac{1 + (2^e - 1)}{2^e - 1} = 2$$

□

- 次に、偶数の完全数はこの形のものに限ることを示す。

## 定理 8

$n$  を偶数の完全数とすると、あるメルセンヌ素数  $2^e - 1$  に対して  $n = 2^{e-1}(2^e - 1)$  となる。

Proof.

$n = 2^a m$ 、 $m$  は奇数、とする。 $n$  は偶数なので  $a \geq 1$  である。

$$2 = \frac{S(n)}{n} = \frac{S(2^a)}{2^a} \cdot \frac{S(m)}{m} = \frac{2^{a+1} - 1}{2^a} \cdot \frac{S(m)}{m}$$

である。ここで、 $2^{a+1} - 1$  は奇数であるが、左辺が 2 なので、これは約分で消えなくてはならず  $2^{a+1} - 1$  は  $m$  の約数となる。 $m = (2^{a+1} - 1)\ell$  とおく。 $\ell > 1$  とすると、 $m$  は少なくとも  $1, \ell, m = (2^{a+1} - 1)\ell$  を約数にもつので

$$2 \geq \frac{2^{a+1} - 1}{2^a} \cdot \frac{1 + \ell + (2^{a+1} - 1)\ell}{(2^{a+1} - 1)\ell} = \frac{2^{a+1}\ell + 1}{2^a\ell} = 2 + \frac{1}{2^a\ell}$$

で矛盾である。

したがって  $\ell = 1$ 、すなわち  $m = 2^{a+1} - 1$  でなくてはならない。  
 $m$  が素数でないとする、真の約数  $s \neq 1$  が存在し、

$$2 \geq \frac{2^{a+1} - 1}{2^a} \cdot \frac{1 + s + (2^{a+1} - 1)}{2^{a+1} - 1} = 2 + \frac{s}{2^a} > 2$$

で、やはり矛盾が生じる。(証明終)

- 二つの定理によって偶数の完全数とメルセンヌ素数の間には一対一の対応があることが分かる。
- 偶数の完全数を見つけることはメルセンヌ素数を見つけることと等価である。
- これまでに知られている最大の素数はメルセンヌ素数である。
- メルセンヌ素数はこれまでに 47 個発見されているらしい (Wikipedia より)。
- メルセンヌ素数が無限個存在するかどうかは分かっていない。したがって完全数も無限個存在するかどうかは分からない。

[初等整数論における未解決問題]

# 奇数の完全数の可能性

## 問題 9

奇数の完全数は一つも発見されていないが、その非存在は証明されていない。

[初等整数論における未解決問題]

- 奇数の完全数を見つけることは、問題が理解しやすいため、アマチュア数学者の心を魅きつける問題の一つとなっているが、実際にはアマチュアに手が出せる問題ではないように思われる。
- ここでは、簡単な議論で、小さな奇数は完全数にはなり得ないことを説明する。

- 素数  $p$  に対して

$$\frac{S(p^a)}{p^a} = \frac{p^{a+1} - 1}{p^a(p - 1)}$$

であった。

- $a \rightarrow \infty$  として

$$T(p) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(p^a)}{p^a} = \frac{p}{p - 1}$$

とおく。

- 任意の自然数  $a$  に対して

$$T(p) = \frac{p}{p - 1} > \frac{S(p^a)}{p^a}$$

である。

- $p, q$  を素数とし  $p < q$  とすると

$$T(p) = \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1} > 1 + \frac{1}{q-1} = \frac{q}{q-1} = T(q)$$

が分かる。

## 命題 10

高々 2 つの素因数しかもたない奇数は完全数ではない。

Proof.

$p, q$  を奇素数とし  $p < q$  とする。また  $n = p^a q^b$  とする。  $p \geq 3, q \geq 5$  である。 よって

$$\begin{aligned}\frac{S(n)}{n} &= \frac{S(p^a)}{p^a} \cdot \frac{S(q^b)}{q^b} < T(p)T(q) \\ &\leq T(3)T(5) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2\end{aligned}$$

であり、 $n$  は完全数ではない。 □

- 3つの素因数をもつ場合には

$$T(3)T(5)T(7) = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{105}{48} > 2$$

となり、簡単ではない。

- 素因数 3 をもたなければ

$$T(5)T(7)T(11) = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} = \frac{77}{48} < 2$$

で完全数にはならない。

- このような議論を丁寧に考えていけば、素因数の数が 3 の場合にも完全数にはなり得ないことが分かる。
- 奇数の完全数が存在すれば、それは少なくとも 9 個の素因数をもち、 $10^{300}$  より大きいことが知られている (Wikipedia より)。

## 関連するお話 – 倍過剰数

- $S(n)/n = \ell + 1$  が整数であるとき、 $n$  を  $\ell$  倍過剰数という。
- 1 倍過剰数が完全数である。
- 例えば 120 は 2 倍過剰数、30240 は 3 倍過剰数である。
- $\ell$  倍過剰数を考えることも、完全数と同じようにおもしろいが、完全数ほど深くは研究されていないようである。

## 関連するお話 - 友愛数

- $220 = 2^2 \times 5 \times 11$  の真の約数の和は

$$S(220) - 220 = 7 \times 6 \times 12 - 220 = 504 - 220 = 284$$

であり、 $284 = 2^2 \times 71$  の真の約数の和は

$$S(284) - 284 = 7 \times 72 - 284 = 504 - 284 = 220$$

である。

- このように  $m$  の真の約数の和が  $n$  で、 $n$  の真の約数の和が  $m$  であるとき、 $m$  と  $n$  を友愛数という。
- $m$  と  $n$  が友愛数であることは、 $S(n) = S(m)$  と言い換えることもできる。

## 関連するお話 – フェルマー数

- $2^e - 1$  の形の素数をメルセンヌ素数といい、偶数の完全数との間に関係があった。またこのとき  $e$  は素数でなくてはならなかった。
- $2^e + 1$  の形の素数を**フェルマー数**という。このとき  $e = 2^a$  の形でなくてはならない。
- フェルマー数は

$$3, 5, 17, 257, 65537 \quad (a = 0, 1, 2, 3, 4)$$

の 5 つしか知られていないが、他にないことが証明されているわけではなく、有限個かどうかさえ分からない。

- フェルマー数は次に述べるように、コンパスと定規だけを用いた作図問題に関係している。

### 定理 11 (Gauss)

$p$  を素数とすると、正  $p$  角形がコンパスと定規だけを用いて作図できるための必要十分条件は、 $p$  がフェルマー素数であることである。

終