# 集合論・筆答レポート (第二回 2021/01/20)

1. 写像 $f : A \to B$、 $g : B \to C$ を考える。[5 点 $\times$ 2]

   (1) 合成写像 $g \circ f$ が単射ならば $f$ は単射であることを示せ。

   (2) 合成写像 $g \circ f$ が全単射であって $g$ が単射ではないような例を具体的に書け (説明不要)。

2. $a, b \in \mathbb{N}$ に対して、ある $\ell \in \mathbb{N}$ がが存在して $b = \ell a$ となるときに $a \mid b$ と定める。[5 点 $\times$ 2]

   (1) 上の関係 “$|$” は $\mathbb{N}$ 上の順序であることを示せ。

   (2) $A = \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{N}$ を “$|$” で順序集合と見る ($a \mid b$ のとき $b$ の方が “大きい” と考えることにする)。$A$ の最大元、最小元、極大元、極小元をすべて求めよ。

3. 整列集合 (または整列順序) の定義を書け。[5 点]

4. 整列順序ではない全順序の例を書け (説明不要)。[5 点]

5. $\sim$ を集合 $A$ 上の同値関係とし $a \in A$ を含む同値類を $C_a$ と表す。$a, b \in A$ に対して $a \sim b$ ならば $C_a = C_b$ であることを示せ。(証明は同値関係の定義を使って詳しく書くこと。) [5 点]

6. $n$ を自然数とする。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して、ある $\ell \in \mathbb{Z}$ がが存在して $a - b = \ell n$ となるときに $a \sim b$ と定める。($a \sim b$ は $a \equiv b \pmod{n}$ のことである。) [5 点 $\times$ 3]

   (1) $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。

   (2) この同値関係による類別の完全代表系を一つ書け。

   (3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を $\sim$ による同値類全体の集合 (商集合) とする。$a \in \mathbb{Z}$ を含む $\sim$ による同値類を $a + n\mathbb{Z}$ と表す。このとき $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の “乗法” $(a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義される (well-defined である) ことを示せ。

7. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ であることを示せ。($\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$ の間に全単射を構成せよ。説明不要。) [5 点]

8. 全射 $A \to B$ が存在すれば、単射 $B \to A$ が存在することを示せ。(選択公理を用いるが気にしなくてもよい。) [5 点]

[5 点 $\times$ 12 = 60 点満点]