集合論・筆答レポート (第一回 2022/11/16)

1. 「ある x があって、任意の y に対して $\mathrm{P}(x, y)$ は真である」という命題の否定を論理記号を用いて表せ。ただし $\mathrm{P}(x, y)$ は x と y に依存する命題である。[5 点]

2. A, B を命題とする。命題「A $\Longrightarrow$ B」に対して、その対偶「($\neg$B) $\Longrightarrow$ ($\neg$A)」が必要十分条件となることを示せ。[5 点]

3. A, B, C を集合とする。$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ であることを示せ。[5 点]

4. 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ を考える。[5 点 × 3]

   (1) 合成写像 $g \circ f$ が単射であるならば f は単射であることを示せ。

   (2) f と g が全射であるならば、合成写像 $g \circ f$ も全射であることを示せ。

   (3) 合成写像 $g \circ f$ が全射であるが f が全射ではないような例を書け。(説明不要。答のみでもよい)

5. 写像 $f : A \to B$, $X \subset A$, $Y \subset B$ を考える。[5 点 × 4]

   (1) $f^{-1}(f(X)) \supset X$ であることを示せ。

   (2) $f^{-1}(f(X)) = X$ が正しいならば証明し、正しくないならば成り立たないような具体例を書け (具体例には説明不要)。

   (3) $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$ であることを示せ。

   (4) $f(f^{-1}(Y)) = Y$ が正しいならば証明し、正しくないならば成り立たないような具体例を書け (具体例には説明不要)。

6. $X = \{1, 2\}$ とする。X のべき集合 2^X から X への写像はいくつあるかを答えよ。またそのうちの一つを具体的に書け。[5 点]

7. 集合 X, Y に対して、X から Y への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X, Y)$ と書く。

   写像 $f : A \to B$ と集合 C に対して、写像 $f^* : \mathrm{Map}(B, C) \to \mathrm{Map}(A, C)$ を $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ で定める。f が全射であるならば f^* は単射であることを示せ。[5 点]

[5 点 × 12 = 60 点満点]