集合論・筆答レポート (第二回 2023/01/18)

1. $f : X \to Y$ を写像とする。A, B を X の部分集合、S, T を Y の部分集合とする。(反例には説明不要) [5 点 × 2]

   (1) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つならば証明し、成り立たないならば反例を書け。

   (2) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ が成り立つならば証明し、成り立たないならば反例を書け。

2. 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ を考える。[5 点 × 2]

   (1) 合成写像 $g \circ f$ が全射であるならば g は全射であることを示せ。

   (2) f と g が単射であるならば、合成写像 $g \circ f$ も単射であることを示せ。

3. 次の問に答えよ。[5 点 × 4]

   (1) 集合 A 上の関係 R が順序であることの定義を書け。

   (2) 順序 R が整列順序であることの定義を書き、整列順序でない全順序の例を一つ書け。

   (3) 順序集合 A の最大元は極大元であることを示せ。

   (4) 極大元であるが最大元でないものをもつ順序集合の例を書け。(集合、順序、最大元でない極大元、を明記すること。)

4. $n \in \mathbb{N}$ とする。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して、ある $\ell \in \mathbb{Z}$ がが存在して $a - b = \ell n$ となるときに $a \sim b$ と定める。($a \sim b$ は $a \equiv b \pmod{n}$ のことである。) [5 点 × 3]

   (1) $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。

   (2) $a \in \mathbb{Z}$ を含む $\sim$ に関する同値類 C_a を $\mathbb{Z}$ の部分集合として $\sim$ を使わずに表せ。

   (3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を $\sim$ による同値類全体の集合 (商集合) とする。このとき $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の “乗法” $C_a C_b = C_{ab}$ が矛盾なく定義される (well-defined である) ことを示せ。

5. 次の問に答えよ。(説明不要。答えのみでもよい。) [5 点 × 2]

   (1) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{N}$ への全単射を一つ具体的に書け。

   (2) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R} - \{0\}$ への全単射を一つ具体的に書け。

[5 点 × 13 = 65 点満点]