集合論・筆答レポート (第二回 2023/01/18) 解答例

1. (1) 成り立たない。

   $X = \{1, 2\}$, $Y = \{y\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $f : X \to Y$ を $f(1) = f(2) = y$ と定める。このとき $A \cap B = \emptyset$ だから $f(A \cap B) = \emptyset$ である。また $f(A) = \{y\}$, $f(B) = \{y\}$ だから $f(A) \cap f(B) = \{y\}$ である。よって $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ である。

   (2) 成り立つ。

   $\subset$) $x \in f^{-1}(S \cup T)$ とする。$f(x) \in S \cup T$ である。$f(x) \in S$ のとき $x \in f^{-1}(S)$, $f(x) \in T$ のとき $x \in f^{-1}(T)$ となるから $x \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ である。よって $f^{-1}(S \cup T) \subset f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ である。

   $\supset$) $y \in f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ とする。$y \in f^{-1}(S)$ のとき $f(y) \in S$, $y \in f^{-1}(T)$ のとき $f(y) \in T$ となるから $f(y) \in S \cup T$ である。よって $y \in f^{-1}(S \cup T)$ である。よって $f^{-1}(S \cup T) \supset f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ である。

   以上より $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ である。

2. (1) $c \in C$ とする。$g \circ f$ が全射であるから $c = g \circ f(a)$ となる $a \in A$ が存在する。$f(a) \in B$ であるから $c = g \circ f(a) = g(f(a)) \in g(B)$ となり g は全射である。

   (2) $a, a' \in A$ とし $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ と仮定する。$g(f(a)) = g(f(a'))$ である。g が単射であるから $f(a) = f(a')$ となる。f が単射であるから $a = a'$ となる。よって $g \circ f$ は単射である。

3. (1)
   - 任意の $a \in A$ に対して $(a, a) \in R$ である。
   - 「$(a, b) \in R$ かつ $(b, c) \in R$」 ならば $(a, c) \in R$ である。
   - 「$(a, b) \in R$ かつ $(b, a) \in R$」 ならば $a = b$ である。

   ($(a, b) \in R$ を aRb と表してもよい。)

   (2) 任意の空でない部分集合が最小元をもつ順序

   $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ に通常の大小関係で順序を定めたもの、など

   (3) a を順序集合 $(A, \leq)$ の最大元とする。$b \in A$ に対して $a \leq b$ と仮定する。a が最大元であることから $b \leq a$ である。よって $a = b$ である。以上より a は極大元である。

   (4) $X = \{1, 2\}$ として $A = 2^X - \{X\}$ とする。このとき $\{1\}$ は極大元であるが最大元ではない。

4. (1)
   - $a \in \mathbb{Z}$ とする。$a - a = 0 \cdot n$ で $0 \in \mathbb{Z}$ であるから $a \sim a$ である。
   - $a \sim b$ とする。$a - b = \ell n$ となる $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在する。$b - a = (-\ell)n$ で $-\ell \in \mathbb{Z}$ であるから $b \sim a$ である。
   - $a \sim b$ かつ $b \sim c$ とする。$a - b = \ell n$, $b - c = mn$ となる $\ell, m \in \mathbb{Z}$ が存在する。$a - c = (a - b) + (b - c) = \ell n + mn = (\ell + m)n$ で $\ell + m \in \mathbb{Z}$ であるから $a \sim c$ である。

   以上より $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である。

   (2) $C_a = \{a + \ell n \mid \ell \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, a - 2n, a - n, a, a + n, a + 2n, \ldots\}$

   (3) $C_a = C_{a'}$, $C_b = C_{b'}$ と仮定する。$a \sim a'$, $b \sim b'$ となるから $a - a' = \ell n$, $b - b' = mn$ となる $\ell, m \in \mathbb{Z}$ が存在する。$a = a' + \ell n$, $b = b' + mn$ である。$ab = (a' + \ell n)(b' + mn) = a'b' + (\ell b' + a'm + \ell mn)n$ で $\ell b' + a'm + \ell mn \in \mathbb{Z}$ であるから $ab \sim a'b'$、すなわち $C_{ab} = C_{a'b'}$ である。したがって乗法は矛盾なく定義される。

5. (1) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ を $f(a) = 2a$ ($a > 0$ のとき)、$f(a) = -2a + 1$ ($a \leq 0$ のとき) で定める。

   (2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0\}$ を $f(a) = a + 1$ (a が 非負整数のとき) $f(a) = a$ (a が 非負整数でないとき) で定める。