集合論問題集

1 論理

1. 「雨の日はいつも勉強をする」この文章の否定を作れ。
2. 「任意の素数は奇数である」という命題について以下の問いに答えよ。
   (1) この命題の真偽を判定し、そのことを証明せよ。
   (2) この命題の否定をつくれ。
3. 「任意の二等辺三角形の両底角は等しい」という命題について以下の問いに答えよ。(「三角形 ABC において、$AB = AC$ ならば $\angle B = \angle C$ である」という意味である。)
   (1) この命題の真偽を判定し、そのことを証明せよ。
   (2) この命題の否定をつくれ。
4. 「n が偶数ならば n^2 も偶数である」という命題について以下の問いに答えよ。
   (1) この命題の真偽を判定せよ。
   (2) この命題の否定をつくれ。
5. 以下の命題の否定を作れ。
   (1) 任意の正則行列に対して、行列式の値は 0 ではない。
   (2) $a < b$ なる有理数 a, b に対して、有理数 q が存在して、 $a < q < b$ となる (有理数の稠密性)。
   (3) ある複素数 x が存在して、$x^2 = -1$ である。
   (4) 有限次元ベクトル空間の間の任意の線形写像は行列で表すことができる。
   (5) 任意の 1 より大きい実数 p に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は収束する。
   (6) ある数列 $a_{m,n}$ が存在して $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ となる。
6. 真理表を使って以下のことを示せ。
   (1) 命題 P に対して「$\neg(\neg P) \iff P$」である。(二重否定)
   (2) 命題 P, Q に対して「$\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$」である。(De Morgan の法則)
   (3) 命題 $P \Rightarrow Q$ はその対偶 $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ と同値である。
   (4) 命題 P, Q, R に対して、「$P \Rightarrow Q$ かつ $Q \Rightarrow R$」が成り立つとき、「$P \Rightarrow R$」が成り立つ。(三段論法)
   (5) 命題 A, B, C に対して、$(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ である。
   (6) 命題 A, B, C に対して、$(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ である。
7. 以下の命題を記号 $(\forall, \exists)$ をつかって書け。またその否定をつくれ。
   (1) 任意の実数に対して、その絶対値は 0 以上である。
   (2) 0 以上の任意の実数 y に対して $f(x) = y$ となるような 10 より大きい実数 x が存在する。
   (3) 任意の正の実数 ε に対して「$n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$」となる自然数 N が存在する。(数列 a_n は α に収束する)
8. $(P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q))$ が真であるとき、命題 P, Q のそれぞれについて、真か、偽か、あるは真偽が確定しないかを判定せよ。
9. 数学における命題とは何かを答えよ。また、自分で命題を作ってみよ。
10. P, Q を命題とする。P が真であるとき Q と $P \Rightarrow Q$ は同値であることを示せ。
11. 二つの命題 P, Q に対して $(P \wedge (\neg Q)) \vee ((\neg P) \wedge Q)$ を**排他的論理和**といい $P \text{ xor } Q$ と書く。$P \text{ xor } Q \iff (P \vee Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q)) \iff (P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge Q))$ であることを示せ。
12. 命題 P, Q に対して「$P \wedge (P \text{ xor } Q) \iff P \wedge (\neg Q)$」 を示せ。

(2011/02/08)

2 集合

1. A, B を集合とする。
   (1) $x \in A \cap B$ であることの定義を書け。
   (2) $x \in A \cup B$ であることの定義を書け。
   (3) $A \subset B$ であることの定義を書け。
   (4) $A = B$ であることの定義を書け。
   (5) $A - B$ の定義を書け。
2. $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 6, 7, 8\}$ であるとき、$A \cap B$, $A \cup B$ をそれぞれ求めよ。
3. A を 4 の倍数全体の集合、B を 6 の倍数全体の集合とする。このとき $A \cap B$ を決定せよ。
4. $A \subset C$ かつ $B \subset C$ であるならば、$A \cup B \subset C$ であることを示せ。
5. A を集合とする。$A \cap \emptyset = \emptyset$、$A \cup \emptyset = A$ を示せ。
6. 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考える。ただし A_λ は集合 M の部分集合とし、補集合は M で考えることにする。
   (1) $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の定義を書け。
   (2) $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ (De Morgan の法則) を証明せよ。
7. $A \subset B$ とする。補集合は B で考えることにして以下を証明せよ。
   (1) $(A^c)^c = A$
   (2) $A \cup B = B$
   (3) $A \cup A^c = B$
   (4) $A^c \cap A = \emptyset$
   (5) $\emptyset^c = B$
8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示せ。ただし A, B は集合 M の部分集合とし、補集合は M で考えることにする。
9. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示せ。ただし A, B は集合 M の部分集合とし、補集合は M で考えることにする。
10. $A \cap B \subset C$ ならば $B \subset A^c \cup C$ であることを証明せよ。ただし A, B, C は集合 M の部分集合とし、補集合は M で考えることにする。
11. $A \cap C = B \cap C$ かつ $A \cup C = B \cup C$ であるならば、 $A = B$ であることを証明せよ。
12. 集合 X の部分集合 $A,\ B$ について $A \cap B = \emptyset$ であることと $A \subset X - B$ であることは同値であることを示せ。
13. 直積集合 $A \times B$ とは何か。その定義を書け。
14. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ であるとき $A \times B$ の元をすべて書け。ただし $a \neq b$ とする。
15. $A = \{a, b, c\}$ という集合のべき集合 2^A を具体的に書け。ただし $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ とする。
16. 自然数 n に対して $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ とおく。
   (1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求め、それが正しいことを証明せよ。
   (2) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求め、それが正しいことを証明せよ。
17. $A \subset \mathbb{N}$ とする。A が無限集合であることを論理記号を使って特徴付けよ。
18. 自然数 $\mathbb{N}$ で添字付けられた集合の族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して

$$B_m = \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j, \quad C_m = \bigcap_{j=m}^{\infty} A_j$$

   とおく。このとき次を示せ。
   (1) $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ は無数に多くの A_n に含まれる元の全体である。
   (2) $\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ はある番号以上のすべての A_n に含まれる元の全体である。
   (3) $m > n$ ならば $A_m \subset A_n$ であるとする。このとき $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ であることを示せ。

(2011/02/08)

3　写像

1. (1) 写像とは何か。その定義を書け。
   (2) 写像が等しいとはどういうことか。その定義を書け。

2. $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ を $x \longmapsto \pm x$ で定めると、これは写像かどうかを答えよ。ただし $\mathbb{R}^+ = \{x > 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$ とする。

3. $f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $x \longmapsto x^2$ で定めると、これは写像かどうかを答えよ。

4. 写像を具体的に一つ作れ。

5. $f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $x \longmapsto x+1,\ g:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $x \longmapsto 2x-3$ で定めたとき、合成写像 $g \circ f$ を求めよ。

6. (1) 写像 $f : X \to Y$ に対して、像 $f(X)$ の定義を書け。
   (2) 写像 $f : X \to Y$ と $A \subset Y$ に対して、A の逆像 $f^{-1}(A)$ の定義を書け。
   (3) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $x \longmapsto 2x$ で定めたとき $\mathbb{N}$ に対する像 $f(\mathbb{N})$ と $A = \{2, 3, 4\} \subset \mathbb{N}$ の逆像 $f^{-1}(A)$ を具体的に書け。

7. $f : X \to Y$ を写像とする。f^{-1} という記号は異なる意味で用いられることがある。これについて説明せよ。

8. (1) 全射、単射の定義を書け。
   (2) 写像 $f : X \to Y$ に対して $f(X) = Y \iff$ 「$^\forall y \in Y,\ ^\exists x \in X \ \ \text{s.t.}\ \ y = f(x)$」(任意の Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が存在する）を示せ。
   (3) 全射 $f : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ を構成せよ。また、それが全射であることを示せ。
   (4) 恒等写像以外の単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を構成せよ。また、それが単射であることを示せ。

9. (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x + 1$ で定めるとき、f は単射であることを示せ。
   (2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 2x$ で定めるとき、f は全射であることを示せ。
   (3) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(x) = 2x$ で定めるとき、f は単射であるが全射でないことを示せ。

10. (1) 全単射の定義を書け。
    (2) 閉区間 $[a, b]$ から閉区間 $[c, d]$ への全単射を具体的に構成せよ。ただし、ここで $a < b,\ c < d$ であるとする。
    (3) $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{N}$ への全単射を具体的に構成せよ。（ちょっと難かしい。）

11. (1) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への単射ではあるが全射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
    (2) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全射ではあるが単射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
    (3) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への単射ではあるが全射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。
    (4) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全射ではあるが単射ではない写像を具体的に一つ構成せよ。

12. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ について以下の問に答えよ。
    (1) f が全射のとき、$Y \supset B$ に対して、$f(f^{-1}(B)) = B$ であることを示せ。
    (2) 一般には $f(f^{-1}(B)) = B$ は正しくない。この式が成り立たないような例をあげよ。
    (3) f が単射のとき、$X \supset A$ に対して、$f^{-1}(f(A)) = A$ であることを示せ。
    (4) 一般には $f^{-1}(f(A)) = A$ は正しくない。この式が成り立たないような例をあげよ。

13. $f : A \to B$ を写像とし $X \subset A, Y \subset A$ とする。
    (1) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ を示せ。
    (2) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ を示せ。また $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ は成り立つかどうかを考察し、成り立つならば証明し、成り立たないならば、反例を挙げよ。

14. $f : A \to B$ を写像、$b, b' \in B$ で $b \neq b'$ とする。このとき $f^{-1}(b) \cap f^{-1}(b') = \emptyset$ であることを示せ。

15. $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ について、$f,\ g$ ともに単射ならば $g \circ f$ も単射であることを示せ。

16. $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ について、f, g ともに全射ならば $g \circ f$ も全射であることを示せ。

17. $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ について、f が全単射であるとき「g が単射である」$\Leftrightarrow$「 $g \circ f$ も単射である」を示せ。

18. $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ について、$g \circ f$ が全射ならば g は全射であることを示せ。

19. $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow Z$ について、$g \circ f$ が単射ならば f は単射であることを示せ。

20. $f : X \longrightarrow Y$ について、f が全単射であるための必要十分条件は、$g : Y \longrightarrow X$ で $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ なるものが存在することである。これを示せ。ただし id_X は X の恒等写像を表すものとする。

21. $f : B \to C$ とする。$f_* : \mathrm{Map}(A,\ B) \to \mathrm{Map}(A,\ C)$ を $f_*(\psi) = f \circ \psi$ で定義する。このとき以下を証明せよ。

    (1) f が単射ならば f_* は単射である。
    (2) f が全射ならば f_* は全射である。

22. $X,\ Y$ を集合、$A,\ B$ を X の部分集合、$C,\ D$ を Y の部分集合とする。
    このとき $f : X \to Y$ に対して以下が成立することを示せ。

    (1) $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$
    (2) $f(A - B) \supset f(A) - f(B)$
    (3) $C \subset D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
    (4) $f^{-1}(Y - D) = X - f^{-1}(D)$
    (5) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
    (6) $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$

23. $a \in Y$ を一つ固定する。$C_a : X \to Y$ を $x \mapsto a$ で定義する。このとき Y の各元に対する逆像を求めよ。

24. 集合 X から Y へ全単射が存在するとき X のべき集合 2^X から Y のべき集合 2^Y へ全単射が存在することを示せ。

25. 写像 $f : X \to Y,\ g, h : Y \to X$ が $g \circ f = id_X,\ f \circ h = id_Y$ を満たすならば、f は全単射で、$g = h$ であることを示せ。

26. 集合 X の部分集合 A に対して、$f_A \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{R})$ を

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

    で定める。(これを A の特性関数という。) $A,\ B$ を X の部分集合とすると、任意の $x \in X$ に対して

$$f_{A\cap B}(x) = f_A(x) f_B(x), \quad f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A\cap B}(x)$$

    であることを示せ。

27. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ Y = \{a, b, c\}$ とし、写像 $f : X \to Y$ を

$$f(1) = a,\ f(2) = b,\ f(3) = b,\ f(4) = a,\ f(5) = b$$

    で定める。このとき、以下のものを求めよ。

    (1) $f(X)$
    (2) $f(\{1, 2\})$
    (3) $f(\{1, 4\})$
    (4) $f^{-1}(a)$
    (5) $f^{-1}(c)$
    (6) $f^{-1}(\{a, c\})$

28. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ とする。また $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{r \in \mathbb{R} \mid a < r < b\}, && \text{(開区間)} \\ [a, b] &= \{r \in \mathbb{R} \mid a \le r \le b\}, && \text{(閉区間)} \\ (a, b] &= \{r \in \mathbb{R} \mid a < r \le b\}, && \text{(半開区間)} \\ [a, b) &= \{r \in \mathbb{R} \mid a \le r < b\}, && \text{(半開区間)} \end{aligned}$$

    の記号を用いる。これらはいずれも $\mathbb{R}$ の部分集合と見る。このとき、以下のものを求めよ。

(1) $f([0,1])$

(2) $f([-1,1])$

(3) $f^{-1}(4)$

(4) $f^{-1}([0,1])$

(5) $f^{-1}([-1,1])$

(6) $f(f^{-1}([0,1]))$

(7) $f(f^{-1}([-1,1]))$

(8) $f([-1,2])$

(9) $f([-1,0])$

(10) $f([-1,2]-[-1,0])$

(11) $f([-1,2])-f([-1,0])$

29. 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x^3-x$ で定める。このとき、以下のものを求めよ。

(1) $f(\mathbb{R})$

(2) $f^{-1}(0)$

(3) $f^{-1}(6)$

30. $f:X\to Y$ は単射であるとする。$A\subset X$ と $x\in X$ について「$x\in A \Longleftrightarrow f(x)\in f(A)$」であることを示せ。

31. $f:A\to B$, $g:B\to C$ とする。

(1) $g\circ f$ が単射で、g が単射ではない例を作れ。

(2) $g\circ f$ が全射で、f が全射ではない例を作れ。

32. $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を写像とする。

(1) $g\circ f$ が全射で g が単射ならば f は全射であることを示せ。

(2) $g\circ f$ が単射で f が全射ならば g は単射であることを示せ。

33. f は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像で、任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して $f(a-b)=f(a)-f(b)$ をみたすものとする。

(1) $f(0)=0$ であることを示せ。

(2) $f(-a)=-f(a)$ であることを示せ。

(3) f が単射であることと $f^{-1}(0)=\{0\}$ であることが同値であることを示せ。

34. $f:A\to B$, $g:A\to C$ とする。簡単のため A, B, C はいずれも空集合ではないとする。次の条件は同値であることを示せ。

(1) ある $h:C\to B$ が存在して $f=h\circ g$ となる。

(2) $g(a)=g(a')$ ならば $f(a)=f(a')$ である。

35. 写像 $f:A\to B$, $g:C\to D$ に対して $f\times g:A\times C\to B\times D$ を $(f\times g)(a,c)=(f(a),g(c))$ で定める。

(1) f, g 共に単射であるとき $f\times g$ も単射であることを示せ。

(2) f, g 共に全射であるとき $f\times g$ も全射であることを示せ。

36. X, Y を空でない集合とする。X から Y への単射が存在するとき、Y から X への全射が存在することを示せ。

37. 写像 $f:A\to B$ に対して、ある集合 C とある全射 $g:A\to C$ とある単射 $h:C\to B$ が存在して、$f=h\circ g$ となることを示せ。

(2011/02/08)

4 関係

1. 集合 X 上の関係の定義を書け。

4.1 順序関係

2. 集合 A 上の関係「$\leq$」が順序関係であることの定義を書け。
3. $(A, \leq)$ を順序集合とする。
   (1) $a \in A$ が $(A, \leq)$ の極大元であることの定義を書け。
   (2) $a \in A$ が $(A, \leq)$ の極小元であることの定義を書け。
   (3) $a \in A$ が $(A, \leq)$ の最大元であることの定義を書け。
   (4) $a \in A$ が $(A, \leq)$ の最小元であることの定義を書け。
   (5) $a \in A$ が $X \subset A$ の上界であることの定義を書け。
   (6) $X \subset A$ が上に有界であることの定義を書け。
4. 集合 X について、べき集合 2^X を考えたとき、関係「$\subset$」は順序関係であることを示せ。
5. 順序集合 $(A, \leq)$ が全順序集合であることの定義を書け。
6. 全順序集合ではない順序集合の例を一つ答えよ。
7. $\mathbb{R}$ が (通常の大小関係による順序で) 整列集合ではないことを示せ。
8. A 集合とし、B, C をその部分集合とする。
   (1) $B \cap C$ は B と C の両方に含まれる A の部分集合のうち、(包含関係に関して) 最大のものであることを示せ。
   (2) $B \cup C$ は B と C の両方を含む A の部分集合のうち、(包含関係に関して) 最小のものであることを示せ。
9. (ベクトル空間とその部分空間についての知識を仮定する。) U をベクトル空間とし、V, W をその部分空間とする。$V + W = \{v + w \mid v \in V,\ w \in W\}$ とおく。
   (1) $V \cap W$, $V + W$ は U の部分空間であることを示せ。
   (2) $V \cap W$ は V と W の両方に含まれる U の部分空間のうち、(包含関係に関して) 最大のものであることを示せ。
   (3) $V + W$ は V と W の両方を含む U の部分空間のうち、(包含関係に関して) 最小のものであることを示せ。
10. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の辞書式順序の定義を書け。またそれが整列順序であることを示せ。
11. 最大元ではない極大元をもつ順序集合の例を作れ。
12. 全順序集合の極大元は最大元であることを示せ。
13. 順序集合に最大元が存在するならば、それは唯一つであることを示せ。
14. 順序集合の最大元は極大元であることを示せ。
15. 順序集合 $(A, \leq)$ に最大元 a が存在するとき、A の極大元は a のみであることを示せ。
16. 最大元をもたない全順序集合の例を作れ。
17. 最小元をもたないが最大元をもつ全順序集合の例を作れ。
18. $(S, \leq)$ を整列集合とする。$a, b \in S$, $a \leq b$ とする。このとき「$a \leq c \leq b$ なる $c \in S$ は有限個しかない」というのは正しいかどうかを考え、正しいならば証明し、正しくなければ反例を構成せよ。
19. $(S, \leq)$ を順序集合とする。$x, y \in S$ に対して「$x \leq z$, $y \leq z$ なる最小の $z \in S$ が存在する」というのは正しいかどうかを考え、正しいならば証明し、正しくなければ反例を構成せよ。(上の条件は正確には「$T = \{z \in S \mid x \leq z,\ y \leq z\}$ が最小元をもつ」ということである。このとき T は $\{x, y\}$ の上界全体の集合である。)
20. $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。S に以下のように関係 $\preceq$ を定める。$a, b \in S$ に対して「$a \preceq b$ であるとは、ある $c \in S$ が存在して $b = ac$ となること」とする。

(1) $(S, \preceq)$ が順序集合であることを示せ。

(2) $(S, \preceq)$ に極大元、極小元、最大元、最小元があるかどうかを考え、存在するならばそれを求めよ。

21. $\mathbb{Z}$ に以下のように関係 $\preceq$ を定める。$a, b \in \mathbb{Z}$ に対して「$a \preceq b$ であるとは、ある $c \in \mathbb{Z}$ が存在して $b = ac$ となること」とする。$(\mathbb{Z}, \preceq)$ が順序集合であるかどうかを判定し、その理由も述べよ。

22. 有限な順序集合は極小元をもつことを示せ。

23. $X = \{a, b, c\}$ とする。X 上の順序はいくつあるか答えよ。また全順序はいくつあるか。

24. $f : X \to Y$ を写像、$(Y, \preceq)$ を順序集合とする。X 上の関係 $\leq$ を「$x, y \in X$ に対して $f(x) \preceq f(y)$ のとき $x \leq y$」として定める。

    (1) $(X, \leq)$ が順序集合であることと f が単射であることは同値である。これを示せ。

    (2) f が単射であるとする。$(Y, \preceq)$ が全順序集合であるならば $(X, \leq)$ も全順序集合であることを示せ。

    (3) f が単射であるとする。$(Y, \preceq)$ が整列集合であるならば $(X, \leq)$ も整列集合であることを示せ。

25. R, R' を集合 X 上の二つの順序とする。$R \subset R'$ であるとき「R は R' よりも弱い順序」、または「R' は R よりも強い順序」であるということにする。この関係によって X 上の順序全体の集合は順序集合となる。X 上の最も弱い順序を求めよ。

4.2 同値関係

26. 集合 X 上の関係「$\sim$」が同値関係であることの定義を書け。

27. ある学生の集合を S とする。$A, B \in S$ に対して「同じ趣味をもっているときに $A \sim B$」と関係 $\sim$ を定める (厳密に定義されるわけではないが、関係が定まったとする)。このとき $\sim$ は同値関係といえるかどうかを考え、その理由も答えよ。

28. 実数成分の n 次正方行列全体の集合 $M(n, \mathbb{R})$ について関係「$\sim$」を「n 次正則行列 P が存在して $B = AP$ のとき $A \sim B$」と定める。このとき関係「$\sim$」は同値関係であることを示せ。

29. 実数成分の n 次正方行列全体の集合 $M(n, \mathbb{R})$ について関係「$\sim$」を「n 次正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ のとき $A \sim B$」と定める。このとき関係「$\sim$」は同値関係であることを示せ。

30. 集合 X の部分集合全体の集合 2^X を考える。$A,\ B \in 2^X$ に対して関係「$\sim$」を「A と B の間に全単射が存在するとき $A \sim B$」と定める。このとき関係「$\sim$」は 2^X 上の同値関係であることを示せ。

31. n 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から原点を除いた集合に以下のように関係「$\sim$」を定める。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n - \{\boldsymbol{0}\}$ に対して、ある 0 でない実数 α が存在して $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$ のとき $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ とする。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。また、このときの同値類を考え、同値類の代表系を一つ求めよ。

32. $f : X \to A$ を写像とする。X 上の関係 $\sim$ を「$x, y \in X$ に対して $f(x) = f(y)$ のとき $x \sim y$」として定める。このとき $\sim$ は同値関係であることを示せ。また、この同値関係による $x \in X$ を含む同値類、および類別を求めよ。

33. (1) $\mathbb{Z}$ について関係「$\sim$」を「$x - y = 2a$ なる $a \in \mathbb{Z}$ が存在するとき $x \sim y$」と定めるとこれは同値関係であることを示せ。

    (2) $0,\ 1$ を含む同値類を求めよ。

    (3) $\mathbb{Z}/\sim$ を求めよ。

34. (1) $n \in \mathbb{N}$ を固定する。$\mathbb{Z} \ni x,\ y$ に対して、$x \equiv y \pmod{n}$ であることの定義を書け。

    (2) この関係は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ。

    (3) この同値関係に関して $a \in \mathbb{Z}$ を含む同値類を求めよ。

    (4) この同値関係の完全代表系を一組求めよ。

    (5) この同値関係による $\mathbb{Z}$ の類別を求めよ。。

    (6) 493256823 を 9 で割ったときの余りを求めよ。(集合論とは直接は関係ない。)

    (7) $2x - 5y = 1$ の整数解を求めよ。(集合論とは直接は関係ない。)

35. (線形代数に関する深い知識を仮定する。) 問題 29 と同様に $M_n(\mathbb{C})$ に同値関係「$\sim$」を定義する。このときの同値類はどのようなものかを考察せよ。

36. X を集合、R を X 上の同値関係、Y を X の部分集合とする。$Y \times Y$ を $X \times X$ の部分集合と見て $R' = R \cap (Y \times Y)$ とおけば R' は Y 上の関係である。R' が Y 上の同値関係であることを示せ。

37. X を集合とし
$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \quad \lambda \neq \mu \text{ ならば } X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$$
とする。$x, y \in X$ に対して「ある $\lambda \in \Lambda$ があって $x \in X_\lambda$ かつ $y \in X_\lambda$ となるときに $x \sim y$」として関係 $\sim$ を定める。このとき $\sim$ は X 上の同値関係であることを示せ。

38. $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ とし、$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3),(4,6),(5,5)\}$ とする。$R \subset X \times X$ である。R を含む最小の同値関係を求めよ。

39. X を集合とする。R は X 上の関係であり、順序関係、かつ同値関係であるとする。R を求めよ。

40. $X = \{1,2,3\}$ とする。X 上の関係はいくつあるかを答えよ。X 上の同値関係はいくつあるかを答えよ。

41. 実数成分の n 次正方行列全体の集合 $M(n,\mathbb{R})$ について関係「$\sim$」を「n 次正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ のとき $A \sim B$」と定める。このとき関係「$\sim$」は同値関係である (問 29 参照)。行列 A を含む同値類を C_A で表し、同値類全体の集合 $M(n,\mathbb{R})/\sim$ を考える。写像 $f : (M(n,\mathbb{R})/\sim) \to \mathbb{R},\ f(C_A) = \det A$ が矛盾なく定義できることを示せ。

42. $n \in \mathbb{N}$ を一つ固定する。$\mathbb{Z}$ に $a \equiv b \pmod n$ で定まる同値関係を考え、$a \in \mathbb{Z}$ を含む同値類を $a + n\mathbb{Z}$, 同値類の全体の集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で表す (問 34 参照)。

    (1) $m, n \in \mathbb{N}$ とする。$f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ f(a + m\mathbb{Z}) = a + n\mathbb{Z}$ が矛盾なく定義できるための条件を求めよ。

    (2) $g : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ g(a + n\mathbb{Z}, b + n\mathbb{Z}) = (a+b) + n\mathbb{Z}$ は矛盾なく定義できることを示せ。

43. X を集合、R を X 上の関係とする。

    (1) R を含む同値関係が存在することを示せ。

    (2) R を含む順序は存在するとは限らない。R を含む順序が存在しないような例を作れ。

44. R を集合 X 上の関係とする。R に含まれる順序、および同値関係は存在するとは限らない。それらが存在しないような例を作れ。

45. $\mathbb{R}$ に次のように関係 $\sim$ を定める。「$r, s \in \mathbb{R}$ に対して、$r - s \in \mathbb{Z}$ であるとき $r \sim s$」

    (1) $\sim$ は同値関係であることを示せ。

    (2) この同値関係に関して $r \in \mathbb{R}$ を含む同値類を求めよ。

    (3) この同値関係による完全代表系を一組求めよ。

    (4) この同値関係による類別を書け。

46. 集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の関係 $\sim$ を「$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \ni (a,b),\ (c,d)$ に対して $(a,b) \sim (c,d)$ とは $ad = bc$ であること」と定める。

    (1) $\sim$ は同値関係であることを示せ。

    (2) $Q = (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\sim$ とおく。また (a,b) を含む同値類を $[a,b]$ と書くことにする。写像 $\varphi : Q \times Q \to Q,\ \varphi([a,b],[c,d]) = [ac, bd]$ が矛盾なく定義できることを示せ。

    (3) (2) と同様の記号を用いる。写像 $\psi : Q \times Q \to Q,\ \psi([a,b],[c,d]) = [ad + bc, bd]$ が矛盾なく定義できることを示せ。

(2011/02/08)

5 難しいこと

5.1 濃度

1. 集合 A, B について以下の問に答えよ。

   (1) $|A| \leq |B|$ であることの定義を述べよ。
   (2) $|A| < |B|$ であることの定義を述べよ。
   (3) $|A| = |B|$ であることの定義を述べよ。

2. $|A| \leq |B|$, $|C| \leq |D|$ であるとき $|A \times C| \leq |B \times D|$ であることを示せ。

3. ベルンシュタイン (Bernstein) の定理を述べよ。

4. 集合の濃度に関して $|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |C|$ ならば $|A| \leq |C|$ であることを示せ。

5. 集合の濃度に関して $|A| < |B|$ かつ $|B| < |C|$ ならば $|A| < |C|$ であることを示せ。

6. 次のような全単射を具体的に構成せよ。ただし (a, b) などは区間を表わすものとする。

   (1) $a < b$ に対して $f : (0, 1) \to (a, b)$
   (2) $a \in \mathbb{R}$ に対して $f : [0, 1) \to [a, \infty)$
   (3) $a \in \mathbb{R}$ に対して $f : (0, 1) \to (a, \infty)$
   (4) $a \in \mathbb{R}$ に対して $f : (0, 1] \to (-\infty, a]$
   (5) $a \in \mathbb{R}$ に対して $f : (0, 1) \to (-\infty, a)$
   (6) $f : [0, 1] \to [0, 1)$
   (7) $f : (0, 1] \to (0, 1)$
   (8) $f : [0, 1) \to (0, 1]$
   (9) $f : (-1, 1) \to (-\infty, \infty)$

7. $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への全単射を具体的に構成せよ。

8. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射を具体的に構成せよ。

9. $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ を示せ。

10. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ を示せ。

11. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ への全単射を具体的に構成せよ。

12. $|X| < |2^X|$ を証明せよ。

13. $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$ であることを示せ。

14. 集合 X とその真の部分集合 Y に対して、$|X| = |Y|$ である、すなわち全単射 $f : X \to Y$ が存在する、とする。このとき $|\mathbb{N}| \leq |X|$ であることを示せ。

15. $|X| \leq |\mathbb{N}|$ となる集合 X は整列順序をもつことを示せ。($|X| \leq |\mathbb{N}|$ となる集合 X を**可算集合**という。)

5.2 選択公理

16. 選択公理 (選出公理) を書け。

17. 整列可能定理を書け。

18. ツォルン (Zorn) の補題を書け。

19. X, Y を空でない集合とする。選択公理を仮定する。X から Y への全射が存在するとき、Y から X への単射が存在することを示せ。

20. 整列可能定理から選択公理を示せ。

21. 集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える。$A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ とおく。$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の **disjoint union** とは

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{(x,\lambda)\in A\times\Lambda \mid x\in A_\lambda\}$$

のこととし、これを $\coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ と書く。このとき $|A|\le|\coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda|$ を示せ。ただし、選択公理を仮定するものとする。

22. (代数学の知識を仮定する。) R を単位元 1 をもつ環、I をその真のイデアルとする。このとき I を含む極大イデアルが存在することを示せ。ただしツォルンの補題を利用してよい。

(2011/02/08)

集合論問題集・解答例と解説

1　論理

1. 雨の日で勉強をしない日がある。

   まず、この文章は「雨の日である $\Rightarrow$ 勉強をする」という意味である。そして「$P \Rightarrow Q$」の否定は「P かつ $\neg Q$」である。

2. (1) 偽である。なぜなら 2 は素数であって、かつ偶数である。
   (2) 素数でありかつ偶数である数が存在する。

3. (1) 真である。
   (2) 底角が等しくない二等辺三角形が存在する。

4. (1) 真である。
   (2) n が偶数でかつ n^2 が奇数である (偶数でない) ものが存在する。

5. (1) ある正則行列が存在して、その行列式の値は 0 である。(行列式の値が 0 であるような正則行列が存在する。)
   (2) $a < b$ である有理数 a, b が存在して、任意の有理数 q に対して、 $a \geq q$ または $q \geq b$ である。

      a, b, q に関する命題「$a < q < b$」は「$a < q$ かつ $q < b$」ということである。

   (3) 任意の複素数に対して、$x^2 \neq -1$ である。
   (4) ある有限次元ベクトル空間の間の線形写像が存在して、それは行列で表すことができない。(行列で表すことができない有限次元ベクトル空間の間の線形写像が存在する。)
   (5) 1 より大きい実数 p が存在して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ は収束しない (発散する)。
   (6) 任意の数列 $a_{m,n}$ に対して、 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} \neq \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n}$ となる。

6. 二つの命題が同値であることをいうには、真理表における対応する列が等しいことを確認すればよい。

(1)

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
1	0	1
0	1	0

(2)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

(3)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

(4)

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

(5)

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$A \vee C$	$B \vee C$	$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

(6)

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

7. (1) ${}^{\forall}x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$
   否定は ${}^{\exists}x \in \mathbb{R},\ |x| < 0$

   (2) ${}^{\forall}y \geq 0,\ {}^{\exists}x > 10,\ f(x) = y$
   否定は ${}^{\exists}y \geq 0,\ {}^{\forall}x > 10,\ f(x) \neq y$
   (ある 0 以上の実数 y が存在して、任意の 10 より大きい実数 x に対して $f(x) \neq y$ となる。)

   (3) ${}^{\forall}\epsilon > 0,\ {}^{\exists}N \in \mathbb{N},\ {}^{\forall}n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon)$
   否定は ${}^{\exists}\varepsilon > 0,\ {}^{\forall}N \in \mathbb{N},\ {}^{\exists}n \in \mathbb{N},\ (n \geq N$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon)$

   否定がほしければ「$\forall, \exists$」をつかって命題を書き直し、$\forall$ は $\exists$、$\exists$ は $\forall$ にそれぞれ書き換え、最後の部分を否定すれば機械的に作ることができる。

8. 真理表を用いる。

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$	$(P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q))$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$(P \Rightarrow Q) \wedge ((\neg P) \vee (\neg Q))$ が真ということは、下の 2 行のいずれかということになる。よってこのとき P は偽で、Q は確定しない。

9. 「真偽がはっきりと定まったこと」を命題という。

   例. 素数は無限に存在する。

10. $P \Rightarrow Q$ の定義が $(\neg P) \vee Q$ であることに注意する。

    Q が真であれば $P \Rightarrow Q$ は真である。

    $P \Rightarrow Q$ が真であるとする。このとき $\neg P$ または Q が真である。しかし P が真であることを仮定しているので $\neg P$ は偽で、よって Q は真である。

    問 8 の解答例にある真理表を用いれば、P が真という仮定から上の 2 行だけを見ればよく、そのとき Q の列と $P \Rightarrow Q$ の列が一致している。

11. 一般に、命題 A, B, C に対して $(A \wedge B) \vee C \iff (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ であることを繰り返し使って

$$\begin{aligned} P \text{ xor } Q &\iff (P \wedge (\neg Q)) \vee ((\neg P) \wedge Q) \\ &\iff ((P \wedge (\neg Q)) \vee (\neg P))) \vee ((P \wedge (\neg Q)) \vee Q) \\ &\iff ((P \vee (\neg P)) \wedge ((\neg Q) \vee (\neg P))) \wedge ((P \vee Q) \wedge ((\neg Q) \vee Q)) \\ &\iff ((\neg Q) \vee (\neg P)) \wedge (P \vee Q) \iff (P \vee Q) \wedge ((\neg Q) \vee (\neg P)) \end{aligned}$$

である。また $(\neg Q) \vee (\neg P) \iff \neg(P \wedge Q)$ であるから

$$(P \vee Q) \wedge ((\neg Q) \vee (\neg P)) \iff (P \vee Q) \wedge (\neg(P \wedge Q))$$

となる。

12. 一般に、命題 A, B, C に対して $(A \vee B) \wedge C \iff (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ であることに注意する。このとき

$$\begin{aligned} P \wedge (P \text{ xor } Q) &\iff P \wedge ((P \wedge (\neg Q)) \vee ((\neg P) \wedge Q)) \\ &\iff (P \wedge (P \wedge (\neg Q))) \vee (P \wedge ((\neg P) \wedge Q)) \\ &\iff P \wedge (\neg Q) \end{aligned}$$

である。

(2011/02/08)

2　集合

1. (1) $x \in A \cap B \iff$「$x \in A$ かつ $x \in B$」
   (2) $x \in A \cup B \iff$「$x \in A$ または $x \in B$」
   (3) $A \subset B \iff$「$x \in A$ ならば $x \in B$」
   (4) $A = B \iff$「$A \subset B$ かつ $A \supset B$」
   (5) $\{a \mid a \in A$ かつ $a \notin B\}$

   定義はきちんと覚えること。定義を知らないとなにもできない。$A - B$ は $A \setminus B$ と書かれることも多い。

2. $A \cap B = \{2, 3, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

3. $A \cap B$ は 12 の倍数全体の集合。

4. $x \in A \cup B$ とする。このとき、$x \in A$ または $x \in B$ である。$x \in A$ のとき $A \subset C$ より $x \in C$ であり、$x \in B$ のとき $B \subset C$ より $x \in C$ である。よって、いずれの場合も $x \in C$ である。以上より $A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば $A \cup B \subset C$ が成り立つ。

5.
   - $A \cap \emptyset = \emptyset$ の証明

     $\supset$)「$x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A \cap \emptyset$」は、$x \in \emptyset$ が偽なので、真である。よって $A \cap \emptyset \supset \emptyset$ である。

     $\subset$) 命題「$x \in A \cap \emptyset$」は「$x \in A$ かつ $x \in \emptyset$」と同値で、$x \in \emptyset$ が偽なので、偽である。よって命題「$x \in A \cap \emptyset \Longrightarrow x \in \emptyset$」は真となり $A \cap \emptyset \subset \emptyset$ である。

     よって $A \cap \emptyset = \emptyset$ である。
   - $A \cup \emptyset = A$ の証明

     $\supset$) $x \in A$ とする。このとき「$x \in A$ または $x \in \emptyset$」は真となり $x \in A \cup \emptyset$ である。よって $A \cup \emptyset \supset A$ である。

     $\subset$) $x \in A \cup \emptyset$ とする。$x \in A$ または $x \in \emptyset$ である。$x \in \emptyset$ は偽であるから $x \in A$ となる。よって $A \cup \emptyset \subset A$ である。

     以上より $A \cup \emptyset = A$ である。

6. (1) ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $x \in A_\lambda$ である。
   (2) $\subset$) $x \in (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$ とする。(1) の否定に注意すれば「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \notin A_\lambda$」である。したがって「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \in {A_\lambda}^c$」となり $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ である。よって $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ となる。

   $\supset$) $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ とする。「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \in {A_\lambda}^c$」、すなわち「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $x \notin A_\lambda$」である。この否定は「ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $x \in A_\lambda$」であるから、$x \in (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c$ となる。これにより $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ となる。

   よって $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} {A_\lambda}^c$ となる。

7. (1) $\supset$) $a \in A$ とする。このとき $a \notin A^c$ なので $a \in (A^c)^c$ である。よって $(A^c)^c \supset A$ となる。

   $\subset$) $a \in B$ で $a \in (A^c)^c$ とする。$a \notin (A^c) = B - A$ である。これは $a \notin B$ または $a \in A$ ということである。しかし $a \in B$ なので $a \in A$ となる。したがって $(A^c)^c \subset A$ である。

   以上を併せて $A = (A^c)^c$ である。

   (2) $\subset$) $x \in A \cup B$ とする。$x \in A$ または $x \in B$ である。仮定より $A \subset B$ だから $x \in A$ ならば $x \in B$ である。したがって、$x \in B$ である。$A \cup B \subset B$ が成り立つ。

   一般に $A \cup B \supset B$ は成り立つので $A \cup B = B$ である。

   (3) $\subset$) $x \in A \cup A^c$ とする。$x \in A$ または $x \in A^c$ である。B が全体集合なので $A \subset B$, $A^c \subset B$ である。したがって $x \in B$ である。$A \cup A^c \subset B$ となる。

   $\supset$) $x \in B$ とする。$x \in A$ または $x \notin A$ なので $x \in A \cup A^c$ である。$A \cup A^c \supset B$ となる。

   以上より $A \cup A^c = B$ が成り立つ。

   (4) $x \in B$ を任意にとる。$x \in A^c \cap A$ と仮定する。このとき「$x \in A$ かつ $x \in A^c$」であり、これは「$x \in A$ かつ $x \notin A$」と同値である。一般に命題 P に対して $P \wedge (\neg P)$ は偽であるから、「$x \in A$ かつ $x \notin A$」は偽である。よって、$x \notin A^c \cap A$ である。したがって $A^c \cap A = \emptyset$ である。

   (5) $x \in B^c$ とする。$x \notin B$ である。全体集合を B としているので $x \in B$ である。これは矛盾である。したがって $B^c = \emptyset$ である。両辺の補集合をとって $B = (B^c)^c = \emptyset^c$ である。

8. $\subset$) $x \in (A\cup B)^c$ とする。$x \notin A\cup B$ である。したがって、$x \notin A$ かつ $x \notin B$ となり、$x \in A^c \cap B^c$ である。

   $\supset$) $x \in A^c \cap B^c$ とする。$x \in A^c$ かつ $x \in B^c$ である。すなわち $x \notin A$ かつ $x \notin B$ だから $x \notin A\cup B$ となる。したがって、$x \in (A\cup B)^c$ である。

   以上より $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ である。

9. 問 8 より、$(A^c\cup B^c)^c = (A^c)^c\cap(B^c)^c = A\cap B$ であるから、両辺の補集合をとって $(A\cap B)^c = ((A^c\cup B^c)^c)^c = A^c\cup B^c$ である。

10. $x \in B$ とする。問 7 (3) より $x \in A$ または $x \in A^c$ である。$x \in A$ のとき $x \in A\cap B$ であり、仮定 $A\cap B \subset C$ より $x \in C$ となる。したがって $x \in A^c$ または $x \in C$ である。したがって $B \subset A^c \cup C$ である。

11. $a \in A$ とし $a \in B$ となることを示す。$a \in A\cup C = B\cup C$ なので $a \in B$ または $a \in C$ である。$a \in C$ とすれば $a \in A\cap C = B\cap C$ であるから $a \in B$ である。よっていずれの場合も $a \in B$ となり $A \subset B$ である。

    同様に $B \subset A$ も示され $A = B$ となる。

12. $A\cap B = \emptyset$ と仮定する。$x \in A$ とする。条件より $A\cap B = \emptyset$ だから $x \notin B$、すなわち $x \in X - B$。よって $A \subset X - B$ である。

    $A \subset X - B$ とする。$A\cap B \supset \emptyset$ は空集合の定義から成り立つので $A\cap B \subset \emptyset$、すなわち $A\cap B = \emptyset$ を示す。$x \in A\cap B$ とすると $x \in A \subset X - B$ なので $x \notin B$ となり、これは矛盾である。よって $A \cap B = \emptyset$ である。

13. $A\times B = \{(x,y) \mid x \in A \ \ y \in B\}$

14. $(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)$

15. $2^A = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},A\}$

    A には 3 個の元があるので 2^3 で 8 個部分集合が存在します。

16. (1) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$

    $\subset$) 任意の A_n は $\mathbb{N}$ の部分集合だから、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{N}$ である。

    $\supset$) $x \in \mathbb{N}$ とする。$x \le x$ だから、$x \in A_x$ である。したがって $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ となる。よって $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset \mathbb{N}$ となる。

    以上から $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ が成り立つ。

    (2) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{1\}$

    $\supset$) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_n \ni 1$ より、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \ni 1$ である。よって $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset \{1\}$ である。

    $\subset$) 次に $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{1\}$ を対偶によって示す。$1 \ne x \in \mathbb{N}$ について $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$、すなわち、ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \notin A_n$ をいえばよい。$x \ge 2$ なので $x \notin \{1\} = A_1$ である。よって $x \ne 1$ ならば $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ である。

    以上から、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{1\}$ が成り立つ。

    (対偶を使わない $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{1\}$ の証明)
    $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a \in A_n$ であるから、特に $a \in A_1 = \{1\}$ である。よって $a = 1$ であり $a \in \{1\}$ である。したがって $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{1\}$ となる。

17. $\forall a \in \mathbb{N},\ \exists b \in A,\ a \le b$

18. (1) $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ とおく。

    無数に多くの A_n に含まれる元の全体からなる集合を S とおく。$a \notin S$ ということは、「$a \in A_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が有限個しかない」ということで、これは「ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ ならば $a \notin A_n$」ということである。論理記号で書けば「$\exists N \in \mathbb{N}(\forall n \in N(n > N \Rightarrow a \notin A_n))$」である。$a \in A$ はその否定であるから、「$\forall N \in \mathbb{N}(\exists n \in \mathbb{N}((n > N) \land (a \in A_n))$」である。

    $B = S$ を示す。

    $\subset$) $a \in B$ とする。$N \in \mathbb{N}$ を任意に取り固定する。B の定義より $a \in B_{N+1} = \bigcup_{j=N+1}^{\infty} A_j$ である。よって、ある $k \ge N+1 > N$ があって $a \in B_k$ である。上記の考察から $a \in S$ となる。したがって $B \subset S$ である。

    $\supset$) $a \in S$ とする。$m \in \mathbb{N}$ を任意に取り固定する。このとき $a \in B_m$ を示せばよい。$a \in S$ であるから、上記の考察から、ある $k > m$ があって $a \in A_k$ である。このとき $a \in A_k \subset \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j = B_m$ である。よって $a \in B$ である。したがって $B \supset S$ である。

    以上より $B = S$ である。

    (2) $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ とおく。ある番号以上のすべての A_n に含まれる元の全体からなる集合を T とおく。$C = T$ を示す。

⊂) $a \in C$ とする。このとき、ある $k \in \mathbb{N}$ があって $a \in C_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$ である。したがって、$\ell \geq k$ なる任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して $a \in A_\ell$ であり、よって $a \in T$ である。したがって $C \subset T$ である。

⊃) $a \in T$ とする。T の定義より、ある $k \in \mathbb{N}$ があって $\ell \geq k$ ならば $a \in A_\ell$ である。したがって

$$a \in \bigcap_{\ell=k}^{\infty} A_\ell = C_k \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m = C$$

である。よって $C \supset T$ である。

以上より $C = T$ である。

(3) B, C は (1), (2) で定めたものとする。$B = C$ を示す。

⊂) $b \in B$ とする。$m \in \mathbb{N}$ を取って固定する。B の定義により $b \in B_m = \bigcup_{j=m}^{\infty} A_j$ である。よって、ある $k \geq m$ があって $b \in A_k$ となるが、仮定より $A_k \subset A_m$ なので $b \in A_m$ である。したがって、任意の $m \in \mathbb{N}$ について $b \in A_m$ となる。よって $b \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = C_1 \subset C$ である。したがって $B \subset C$ である。

⊃) $c \in C$ とする。$m \in \mathbb{N}$ を任意に取り固定する。C の定義により、ある $k \in \mathbb{N}$ があって $c \in C_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$ である。よって $\ell \geq k$ なる任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して $c \in A_\ell$ である。$n = \max\{m, k\}$ とおく。$n \geq k$ より $c \in A_n$ である。また $n \geq m$ と仮定により $A_n \subset A_m$ である。更に $A_m \subset B_m$ である。よって $c \in B_m$ となる。$m \in \mathbb{N}$ は任意に取って固定したものだったから $c \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = B$ である。$B \supset C$ が成り立つ。

以上より $B = C$ である。

(2011/02/08)

3 写像

1. (1) 集合 X, Y に対して、X の各元に対して Y の元をひとつずつ対応させる規則を X から Y への写像という。(f が X から Y の写像であるとき $f : X \to Y$ とかく。)

   (2) $f : X \to Y$, $g : A \to B$ が等しいとは $X = A$, $Y = B$ であり、任意の $x \in X = A$ に対して $f(x) = g(x)$ であることをいう。(このとき $f = g$ とかく。)

2. 写像ではない。なぜなら、X の各元に対して Y の元が 2 つ対応しているので定義に反する。

3. 写像である。

4. $f : \mathbb{N} \to \{0\} \cup \mathbb{N}$ を $f(x) = x - 1$ で定めるとこれは写像である。

5. 合成写像の定義から、$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1) - 3 = 2x - 1$ である。つまり、合成写像は、$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto 2x - 1)$ である。

6. (1) $f(X) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$

   (2) $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$

   (3) $f(\mathbb{N}) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$, $\quad f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \in \{2, 3, 4\}\} = \{1, 2\}$

7. 写像 $f : X \to Y$ に対して f^{-1} は次の意味で用いられる。

   (1) **写像の逆像**
   $y \in Y$ に対して
   $$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$
   である。また $B \subset Y$ に対して
   $$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$$
   である。$f^{-1}(y)$, $f^{-1}(B)$ ともに X の部分集合である。

   (2) **逆写像**
   f が全単射のときに限り、f^{-1} で f の逆写像を表す。すなわち $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ が唯一つ存在し、$f^{-1}(y) = x$ である。$f^{-1}(y)$ は X の元である。

   f が全単射であっても (1) の意味で用いることもできる。このとき $f^{-1}(y)$ は (1) の意味ならば X の (唯一つの要素をもつ) 部分集合、(2) の意味ならば X の一つの元である。この記号だけではどちらであるかの判別は不可能であり、説明がない場合には前後の文脈から理解することとなる。$B \subset Y$ に対する $f^{-1}(B)$ はどちらで理解しても同じものになる。

8. (1) $f : X \to Y$ を写像とする。

   - f が単射であることの定義
     X の元 x, y に対して、$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ が成り立つとき f は単射であるという。(任意の X の元 x, y に対して、$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ が成り立つときとしてもよい。)
   - f が全射であることの定義
     $f(X) = Y$ が成り立つとき f が全射であるという。(任意の Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が存在するときとしてもよい。)

   (2) $\Rightarrow$) $f(X) = Y$ であるから $f(X) \supset Y$ である。すなわち、任意の Y の元 y に対して $f(x) = y$ となるような X の元 x が存在する。
   $\Leftarrow$) 写像の定義から $f(X) \subset Y$ で、仮定より、$f(X) \supset Y$ である。よって $f(X) = Y$ である。

   (3) 問題 4 の写像が全射となっている。
   なぜなら、$\{0\} \cup \mathbb{N}$ の任意の元 x に対して $x = (x+1) - 1 = f(x+1)$ となって、$x + 1$ は $\mathbb{N}$ の元である。したがって f は全射である。

   (4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $x \mapsto 3x$ と定めると単射である。
   なぜなら、任意の $\mathbb{N}$ の元 x, y に対して、$f(x) = f(y)$ とすると、$3x = 3y$ だから、$x = y$ となる。よって f は単射である。

   ここで、書いたものは例であり、問題の条件を満たす写像は多数存在する。

9. (1) $f(x)=f(y)$ とする。このとき $x+1=y+1$ なので $x=y$ である。
   (2) $r\in\mathbb{R}$ とする。$r/2\in\mathbb{R}$ であり $f(r/2)=r$ である。
   (3) $f(x)=f(y)$ とする。$2x=2y$ なので $x=y$ であり、よって f は単射である。$1\in\mathbb{Z}$ に対して $1=f(x)=2x$ となる $x\in\mathbb{Z}$ は存在しないので f は全射ではない。

10. (1) 写像 f が全単射であるとは、f が全射かつ単射であることである。(任意の $y\in Y$ に対して $f(x)=y$ となる $x\in X$ がただひとつ定まるとしてもよい。)
   (2) $f(x)=\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)+c$ と定めると全単射である。(点 $(a,\ c)$ を通る傾き $\dfrac{d-c}{b-a}$ の直線である。)
   (3) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ を

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{if } x>0\\ 1 & \text{if } x=0\\ -2x+1 & \text{if } x<0\end{cases}$$

で定めるとこれは全単射である。

11. (1) $f(n)=n+1\quad(n\in\mathbb{N})$
   (2) $\begin{cases}f(1)=1\\ f(n)=n-1\quad(n\in\mathbb{N},n\geq 2)\end{cases}$
   (3) $f(x)=e^x\quad(x\in\mathbb{R})$
   (4) $f(x)=x^3-x\quad(x\in\mathbb{R})$

   条件を満たす写像は他にもたくさんある。

12. (1) $\subset$) $x\in f(f^{-1}(B))$ とする。ある $y\in f^{-1}(B)$ が存在して、$x=f(y)$ となる。ここで、$y\in f^{-1}(B)$ より、$f(y)\in B$ となって(逆像の定義)$x=f(y)\in B$ である。
   $\supset$) $x\in B$ とする。f は全射なので、ある $y\in X$ が存在して、$f(y)=x$ となる。ここで $f(y)=x\in B$ なので $y\in f^{-1}(B)$ である。したがって $x=f(y)\in f(f^{-1}(B))$ である。
   以上から、$f(f^{-1}(B))=B$ となる。
   (2) $X=Y=\mathbb{Z}$ とし $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を定値写像 $f(a)=0$ $(\forall a\in\mathbb{Z})$ とする。このとき $B=\{1\}$ とすれば $f^{-1}(B)=\emptyset$ であり $f(f^{-1}(B))=\emptyset\neq B$ である。
   (3) $\subset$) $x\in f^{-1}(f(A))$ とする。$f(x)\in f(A)$ となって、像の定義より、ある $y\in A$ が存在して $f(x)=f(y)$ となる。f は単射なので $x=y\in A$ である。
   $\supset$) $x\in A$ とする。$f(x)\in f(A)$ で、逆像の定義より、$x\in f^{-1}(f(A))$ である。
   以上から、$f^{-1}(f(A))=A$ となる。
   (4) $X=Y=\mathbb{Z}$ とし $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を定値写像 $f(a)=0$ $(\forall a\in\mathbb{Z})$ とする。このとき $A=\{1\}$ とすれば $f(A)=\{0\}$ であり $f^{-1}(f(A))=\mathbb{Z}\neq A$ である。

13. (1) $\supset$) $b\in f(X)\cup f(Y)$ とする。このとき $b\in f(X)$ または $b\in f(Y)$ である。$b\in f(X)$ とすると、ある $x\in X$ があって $b=f(x)$ である。このとき $x\in X\subset X\cup Y$ なので $b=f(x)\in f(X\cup Y)$ である。$b\in f(Y)$ のときもまったく同様にして $b\in f(X\cup Y)$ となる。よって $f(X\cup Y)\supset f(X)\cup f(Y)$ である。
   $\subset$) $x\in f(X\cup Y)$ とする。このとき、ある $a\in X\cup Y$ が存在して $f(a)=x$ である。$a\in X$ ならば $x=f(a)\in f(X)$ であり、$a\in Y$ ならば $x=f(a)\in f(Y)$ なので $x\in f(X)\cup f(Y)$ である。よって $f(X\cup Y)\subset f(X)\cup f(Y)$ である。
   以上から、$f(X\cup Y)=f(X)\cup f(Y)$ となる。
   (2)
   - $b\in f(X\cap Y)$ とする。ある $x\in X\cap Y$ があって $b=f(x)$ である。$x\in X$ より $b=f(x)\in f(X)$ であり、$x\in Y$ より $b=f(x)\in f(Y)$ である。よって $b\in f(X)\cap f(Y)$ となり $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$ が成り立つ。
   - $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$ は成り立たない。
     (反例)$f:\{0,\ 1\}\to\{a\}$ を $f(0)=f(1)=a$ と定め、$X=\{0\}$, $Y=\{1\}$ とすると、$f(X)=\{a\}$, $f(Y)=\{a\}$ である。よって $f(X\cap Y)=f(\emptyset)=\emptyset\neq\{a\}=f(X)\cap f(Y)$ であるから等号は成立しない。

14. $f^{-1}(b)\cap f^{-1}(b')\neq\emptyset$ と仮定し $a\in f^{-1}(b)\cap f^{-1}(b')$ とする。定義により $b=f(a)=b'$ であるが、$b\neq b'$ の仮定に反する。よって $f^{-1}(b)\cap f^{-1}(b')=\emptyset$ である。

15. $x,\ y\in X$ に対して $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$ とする。このとき $g(f(x))=g(f(y))$ となって、g が単射なので、$f(x)=f(y)$。さらに、f も単射だから $x=y$。すなわち、$g\circ f$ は単射である。

16. $x \in Z$ とする。g が全射だから適当な $y \in Y$ が存在して、$x = g(y)$ となる。また f も全射だから、適当な $z \in X$ が存在して $y = f(z)$ となる。このとき $x = g(y) = g(f(z)) = (g \circ f)(z)$。であるから $g \circ f$ は全射である。

17. $\Rightarrow$) $x,\ y \in X$ に対して、$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ とする。このとき $g(f(x)) = g(f(y))$ となり、$g,\ f$ ともに単射であるから、$x = y$ となる。。すなわち $g \circ f$ は単射である。

    $\Leftarrow$) $x,\ y \in Y$ に対して、$g(x) = g(y)$ とする。f は全単射だから、$x = f(a), y = f(b)$ となる $a, b \in X$ 存在する。このとき、$g(f(a)) = g(x) = g(y) = g(f(b))$ となる。$g \circ f$ は単射なので、$a = b$ である。よって $x = f(a) = f(b) = y$ である。以上より g は単射である。

18.
    - 元をとって考える
    - 像で考える

    の二つの方法で解いてみることにする。

    [解答 1] $z \in Z$ とする。$g \circ f$ は全射だから、$z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ となる $x \in X$ が存在する。$f(x) \in Y$ なので g は全射である。

    [解答 2] $g \circ f$ は全射なので $Z = (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y) \subset Z$ である。よって $Z = g(Y)$ となり g は全射である。

19. $f(x) = f(x')$ とする。このとき $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$ である。$g \circ f$ は単射なので $x = x'$ となる。

20. f が全単射とすれば、f は逆写像 f^{-1} をもつ。$g = f^{-1}$ とすれば、これは $g \circ f = id_X,\ f \circ g = id_Y$ を満たす。

    $g : Y \longrightarrow X$ を $g \circ f = id_X$ かつ $f \circ g = id_Y$ を満たすものとする。恒等写像は全単射なので $f \circ g = id_Y$ と問題 18 より f は全射である。また $g \circ f = id_X$ と問題 19 より f は単射である。よって f は全単射である。

21. (1) $x,\ y \in \mathrm{Map}(A,\ B)$ に対して、$f_*(x) = f_*(y)$ であるとする。任意の $a \in A$ に対して、$(f_*(x))(a) = (f_*(y))(a)$、すなわち $f(x(a)) = f(y(a))$ である。ここで、f は単射なので、$x(a) = y(a)$ となる。$a \in A$ は任意なので $x = y$ となる。したがって f_* は単射である。

    (2) $x \in \mathrm{Map}(A,\ C)$ とする。$f : B \to C$ は全射なので、各 $a \in A$ に対して $x(a) = f(b_a)$ なる $b_a \in B$ が存在する。このとき $y : A \to B$ を $y(a) = b_a$ で定めれば (実はここで選択公理が必要である)、$f_*(y)(a) = f(y(a)) = f(b_a) = x(a)$ となり $f_*(y) = x$ である。よって f_* は全射である。

22. (1) $x \in f(A)$ とする。このとき、ある $y \in A$ が存在して、$x = f(y)$ となる。ここで $A \subset B$ だから、$y \in B$ となって、$x \in f(B)$ である。したがって $f(A) \subset f(B)$ である。

    (2) $x \in f(A) - f(B)$ とする。このとき $x \in f(A)$ かつ $x \notin f(B)$ である。よって、ある $a \in A$ が存在して $x = f(a)$ となる。$a \in B$ とすると $x = f(a) \in f(B)$ となり矛盾が生じるので $a \notin B$ である。したがって $a \in A - B$ となり $x \in f(A - B)$ である。よって $f(A - B) \supset f(A) - f(B)$ が成り立つ。

    (3) $x \in f^{-1}(C)$ とする。このとき $f(x) \in C$ である。$C \subset D$ なので、$f(x) \in D$ である。よって $x \in f^{-1}(D)$ となる。したがって $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ となる。

    (4) $\subset$) $x \in f^{-1}(Y - D)$ とする。$f(x) \in Y - D$ となるので、$f(x) \in Y$ かつ $f(x) \notin D$ である。したがって、$x \in f^{-1}(Y) = X, x \notin f^{-1}(D)$ となって、$x \in X - f^{-1}(D)$ である。$f^{-1}(Y - D) \subset X - f^{-1}(D)$ が成り立つ。

    $\supset$) $x \in X - f^{-1}(D)$ とする。$x \in X$ かつ $x \notin f^{-1}(D)$ である。よって、$f(x) \in f(X) \subset Y, f(x) \notin D$ であり $f(x) \in Y - D$ となる。したがって $x \in f^{-1}(Y - D)$ となる。よって $f^{-1}(Y - D) \supset X - f^{-1}(D)$ である。

    以上から $f^{-1}(Y - D) = X - f^{-1}(D)$ が成り立つ。

    (5) $\subset$) $x \in f^{-1}(C \cap D)$ とする。$f(x) \in C \cap D$ となるので、$f(x) \in C$ かつ $f(x) \in D$ である。したがって、$x \in f^{-1}(C)$ かつ $x \in f^{-1}(D)$ となり、$x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ である。よって $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ である。

    $\supset$) $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ とする。$x \in f^{-1}(C)$ かつ $x \in f^{-1}(D)$ である。よって $f(x) \in C$ かつ $f(x) \in D$ である。すなわち $f(x) \in C \cap D$ であり、$x \in f^{-1}(C \cap D)$ となる。したがって $f^{-1}(C \cap D) \supset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ となる。

    以上から、$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ が成り立つ。

    (6) $\subset$) $x \in f(f^{-1}(C))$ とする。ある $y \in f^{-1}(C)$ が存在して $x = f(y)$ となる。ここで、$f(y) \in C$ だから、$x = f(y) \in C$ である。また $y \in f^{-1}(C) \subset X$ だから、$f(y) \in f(X)$ である。よって $x \in C \cap f(X)$ となる。$f(f^{-1}(C)) \subset C \cap f(X)$ が成り立つ。

    $\supset$) $x \in C \cap f(X)$ とする。$x \in C$ かつ $x \in f(X)$ である。ある $y \in X$ が存在して $x = f(y)$ となる。$f(y) = x \in C$ だから、$y \in f^{-1}(C)$ である。したがって $x = f(y) \in f(f^{-1}(C))$ となる。よって $f(f^{-1}(C)) \supset C \cap f(X)$ である。

    以上から、$f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$ が成り立つ。

23. $f^{-1}(a) = X,\ f^{-1}(x) = \emptyset\ (x \neq a)$

このように集合 X の任意の元を集合 Y の唯一つの元 a へうつす写像を a への**定値写像**という。

24. $f : X \to Y$ を全単射とする。このとき、$\tilde{f} : 2^X \to 2^Y$ を、$A \in 2^X$ に対して $\tilde{f}(A) = f(A)$ で定めると、これが全単射であることを示す。

$g : Y \to X$ を f の逆写像とし $\tilde{f}$ と同様に写像 $\tilde{g} : 2^Y \to 2^X$ を定義する。このとき $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id_{2^X}$ と $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{2^Y}$ を示せば、問題 20 より $\tilde{f}$ は全単射である。

$A \in 2^X$ とするとき問題 22 (6) より $g(g^{-1}(A)) = A \cap g(2^Y)$ であるが、g は全射なので $g(2^Y) = 2^X$ であり、よって $g(g^{-1}(A)) = A$ である。これは $\tilde{g} \circ \tilde{f} = id_{2^X}$ を意味する。

同様に $\tilde{f} \circ \tilde{g} = id_{2^Y}$ も成り立ち $\tilde{f}$ は全単射である。

25. 問題 18, 19 より、f は全単射である。また $g = g \circ id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_X \circ h = h$ である。

26. まず $f_{A\cap B}(x) = f_A(x)f_B(x)$ を示す。$x \in A \cap B$ のとき $f_A(x) = 1 = f_B(x)$ なので $f_A(x)f_B(x) = 1$ である。それ以外の場合には $f_A(x) = 0$ または $f_B(x) = 0$ なので $f_A(x)f_B(x) = 0$ である。よって $f_{A\cap B}(x) = f_A(x)f_B(x)$ である。

$f_{A\cup B}(x) = f_A(x)+f_B(x)-f_{A\cap B}(x)$ を示す。(1) $x \in A\cap B$, (2) $x \in A\cap B^c$, (3) $x \in A^c\cap B$, (4) $x \in A^c\cap B^c$ の四つの場合に分けて考える。(1) のとき (右辺) $= 1+1-1 = 1 =$ (左辺) である。(2) のとき (右辺) $= 1+0-0 = 1 =$ (左辺) である。(3) のとき (右辺) $= 0+1-0 = 1 =$ (左辺) である。(4) のとき (右辺) $= 0+0-0 = 0 =$ (左辺) である。よっていずれの場合も $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_{A\cap B}(x)$ が成り立つ。

27. (1) $\{a, b\}$
    (2) $\{a, b\}$
    (3) $\{a\}$
    (4) $\{1, 4\}$
    (5) $\emptyset$ (空集合)
    (6) $\{1, 4\}$

28. (1) $f([0, 1]) = [0, 1]$
    (2) $f([-1, 1]) = [0, 1]$
    (3) $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$
    (4) $f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$
    (5) $f^{-1}([-1, 1]) = [-1, 1]$
    (6) $f(f^{-1}([0, 1])) = f([-1, 1]) = [0, 1]$
    (7) $f(f^{-1}([-1, 1])) = f([-1, 1]) = [0, 1]$
    (8) $f([-1, 2]) = [0, 4]$
    (9) $f([-1, 0]) = [0, 1]$
    (10) $f([-1, 2] - [-1, 0]) = f((0, 2]) = (0, 4]$
    (11) $f([-1, 2]) - f([-1, 0]) = [0, 4] - [0, 1] = (1, 4]$

29. (1) $\mathbb{R}$
    (2) $\{-1, 0, 1\}$
    (3) $\{2\}$

30. $\Longrightarrow$) $x \in A$ ならば、$f(A)$ の定義より $f(x) \in f(A)$ である。

$\Longleftarrow$) $f(x) \in f(A)$ とする。ある $a \in A$ があって $f(x) = f(a)$ となる。このとき f が単射であることから $x = a$ となり $x \in A$ である。

31. (1) $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1\}$ とし、$f : A \to B$ を $f(1) = 1$, $g : B \to C$ を $g(1) = g(2) = 1$ で定める。このとき g は単射ではない。また $g \circ f : A \to C$ は $f(1) = 1$ で定まるものであり、単射である。
    (2) (1) と同じ A, B, C, f, g が条件を満たしている。すなわち f は全射でなく、$g \circ f$ は全射である。

32. (1) $y \in Y$ とする。$g(y) \in Z$ に対して、$g \circ f$ が全射なので、ある $x \in X$ があって $g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$ である。g が単射なので $y = f(x)$ となる。よって f は全射である。
    (2) $y, y' \in Y$ について $g(y) = g(y')$ とする。f は全射なので、ある $x, x' \in X$ が存在して $y = f(x)$, $y' = f(x')$ となる。このとき $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x')$ である。$g \circ f$ は単射なので $x = x'$ となる。よって $y = f(x) = f(x') = y'$ となり g は単射である。

問 18、問 19 を用いれば (1) の g, (2) の f は全単射である。これを用いて証明してもよい。

33. (1) $f(0) = f(0-0) = f(0) - f(0) = 0$ である。

    (2) $f(-a) = f(0-a) = f(0) - f(a) = -f(a)$ である。

    (3) f は単射であるとする。(1) より $0 \in f^{-1}(0)$ であるから $\{0\} \subset f^{-1}(0)$ である。$a \in \mathbb{R}$ を $f(a) = 0$ をみたすものとすると $f(a) = 0 = f(0)$ で、f が単射であることにより $a = 0$ である。よって $f^{-1}(0) = \{0\}$ である。

    $f^{-1}(0) = \{0\}$ とする。$a, b \in \mathbb{R}$ について $f(a) = f(b)$ とする。このとき $f(a-b) = f(a) - f(b) = 0$ である。したがって $a - b \in f^{-1}(0) = \{0\}$ となり $a - b = 0$、すなわち $a = b$ である。よって f は単射である。

34. (1) $\Rightarrow$ (2).
条件を満たす $h : C \to B$ が存在したとする。また $g(a) = g(a')$ とする。このとき $f(a) = h \circ g(a) = h(g(a)) = h(g(a')) = h \circ g(a') = f(a')$ である。

    (2) $\Rightarrow$ (1).
「$g(a) = g(a')$ ならば $f(a) = f(a')$」が成り立つと仮定し、$f = h \circ g$ となる $h : C \to B$ を構成する。$b_0 \in B$ を一つ選ぶ。

    - $c \in C - g(A)$ に対しては $h(c) = b_0$ とする。
    - $c \in g(A)$ とする。ある $a \in A$ があって $g(a) = c$ である。このとき $h(c) = f(a)$ として、写像が矛盾なく定義できることを示す。これを示すには $g(a) = c = g(a')$ なる $a, a' \in A$ に対して $f(a) = f(a')$ となることをいえばよいが、これは仮定から成り立っている。

    上のように定義した h に対して $f = h \circ g$ であることを示す。$a \in A$ とする。このとき h の定義により $h \circ g(a) = h(g(a)) = f(a)$ である。よって $f = h \circ g$ が成り立つ。

35. (1) $(f \times g)(a, c) = (f \times g)(a', c')$ とする。このとき $(f(a), g(c)) = (f(a'), g(c'))$ であるから $f(a) = f(a'), g(c) = g(c')$ である。f, g は共に単射なので $a = a'$, $c = c'$ となる。よって $(a, c) = (a', c')$ となる。よって $f \times g$ は単射である。

    (2) $(b, d) \in B \times D$ とする。$b \in B$, $d \in D$ である。f は全射なので、ある $a \in A$ があって $f(a) = b$ である。また g は全射なので、ある $c \in C$ があって $g(c) = d$ である。このとき $(a, c) \in A \times C$ であって $(f \times g)(a, c) = (f(a), g(c)) = (b, d)$ となるので $f \times g$ は全射である。

36. $f : X \to Y$ を単射とする。このとき $g : X \to f(X)$ $(g(x) = f(x))$ が存在して、これは全単射である。$h : Y \to X$ を以下のように定義する。$x_0 \in X$ を任意にとり、固定する。そして

$$h(y) = \begin{cases} g^{-1}(y), & y \in f(x) \text{ のとき} \\ x_0, & y \notin f(x) \text{ のとき} \end{cases}$$

    とする。このとき $h(Y) \supset h(f(X)) = g^{-1}(f(X)) = g^{-1}(g(X)) = X$ であるから h は全射である。

37. $C = f(A)$ とする。このとき $g : A \to C$ を $g(a) = f(a)$ で定めれば $f(A)$ の定義より g は全射である。また $h : C \to B$ を埋め込みとする。すなわち $c \in C = f(A)$ に対して $h(c) = c$ である。埋め込み h は単射である。またこのとき、$a \in A$ に対して $h \circ g(a) = h(g(a)) = g(a) = f(a)$ となるので $h \circ g = f$ である。

(2011/02/08)

4 関係

1. X 上の関係とは、直積集合 $X \times X$ の部分集合のことである。

4.1 順序関係

2. 集合 A 上の関係「 $\leq$ 」を以下３つの条件を満たすとき「 $\leq$ 」を順序関係であるという。
   - (反射律) 任意の $x \in A$ に対して、$x \leq x$ が成り立つ。
   - (非対称律) $x,\ y \in A$ に対して、$x \leq y$ and $y \leq x$ ならば $x = y$ が成り立つ。
   - (推移律) $x,\ y,\ z \in A$ に対して、$x \leq y, y \leq z$ ならば $x \leq z$ が成り立つ。

3. (1) $b \in A$ について、$a \leq b$ ならば $a = b$ である。
   (2) $b \in A$ について、$b \leq a$ ならば $a = b$ である。
   (3) 任意の $b \in A$ に対して $b \leq a$ である。
   (4) 任意の $b \in A$ に対して $a \leq b$ である。
   (5) 任意の $x \in X$ に対して $x \leq a$ である。
   (6) X の上界が存在する。

4. - 任意の $A \in 2^X$ に対して、$A \subset A$ は成り立つ。
   - $A,\ B \in 2^X$ に対して、$A \subset B$ かつ $B \subset A$ ならば $A = B$ である。
   - $A,\ B,\ C \in 2^X$ に対して、$A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば、$A \subset C$ である。

   以上から、関係「$\subset$」は順序関係である。

5. $(A, \leq)$ が順序集合であって、任意の $x,\ y \in A$ に対して $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つとき、$(A, \leq)$ を全順序集合であるという。

6. - $(\mathbb{N}, |)$ (自然数全体の集合に “割り切れる” という関係を考えたもの)。
   - $(2^A, \subset)$ (集合 A の部分集合全体の集合に “含まれる” という関係を考えたもの)。ただし A は二つ以上の要素を持つものとする。

7. $\mathbb{R} \supset (0,\ 1)$ に対して、$(0,\ 1)$ は最小元をもたない。なぜなら、$x \in (0,\ 1)$ が最小元だったと仮定すると、任意の $y \in (0,\ 1)$ に対して、$x \leq y$ が成り立つ。ここで、$0 < x$ であるから、$0 < x/2 < x < 1$ となり、x より小さい $(0,\ 1)$ の元 $x/2$ が存在する。よって $(0\ 1)$ に最小元は存在しない。したがって、$\mathbb{R}$ は整列集合ではない。

   整列集合とは任意の空でない順序部分集合が最小元を持つ集合のことである。

8. (1) $B \cap C$ が B と C の両方に含まれる A の部分集合であることは明らかである。
   最大であることをいうには $U \subset B$ かつ $U \subset C$ である A の任意の部分集合 U に対して、$U \subset B \cap C$ を示せばよい。
   $U \subset B$ かつ $U \subset C$ と仮定する。$x \in U$ とする。このとき $x \in U \subset B$ かつ $x \in U \subset C$ である。よって $x \in B \cap C$ であり、$U \subset B \cap C$ である。
   (2) $B \cup C$ が B と C の両方を含む A の部分集合であることは明らかである。
   最小であることをいうには $U \supset B$ かつ $U \supset C$ である A の任意の部分集合 U に対して、$U \supset B \cap C$ を示せばよい。
   $U \supset B$ かつ $U \supset C$ と仮定する。$x \in B \cup C$ とする。$x \in B$ または $x \in C$ である。$x \in B$ とすると $x \in B \subset U$ である。$x \in C$ とすると $x \in C \subset U$ である。よって $x \in U$ であり、$U \supset B \cap C$ である。

9. (1) $v, w \in V \cap W,\ \alpha$ をスカラーとすると $v + w, \alpha v \in V \cap W$ は簡単に分かるので $V \cap W$ は部分空間である。$V + W$ についても同様である。
   (2) $V \cap W$ が V と W の両方に含まれる部分空間であることはすぐに分かる。U を V と W の両方に含まれる部分空間とすれば、明らかに $U \subset V \cap W$ となるので、$V \cap W$ はそのような部分空間のうち最大のものである。
   (3) $V + W$ が V と W の両方を含む部分空間であることはすぐに分かる。U を V と W の両方を含む部分空間とすれば $U \supset V + W$ であることもすぐに分かるので、$V + W$ はそのような部分空間のうち最小のものである。

   一般に $V + W \neq V \cup W$ である。$V \cup W$ は一般に部分空間にはならない。

10. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に次のように定めた順序を辞書式順序という。(a_0,b_0), $(a_1,b_1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に対して

   (1) $a_0<a_1$ のとき $(a_0,b_0)\le(a_1,b_1)$ である、

   (2) $a_0=a_1$ かつ $b_0\le b_1$ のとき $(a_0,b_0)\le(a_1,b_1)$ である。

   まず、これが順序であることを示す。

   - 任意の $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に対して (2) より $(a,b)\le(a,b)$ である。
   - $(a,b)\le(c,d)$ かつ $(c,d)\le(a,b)$ とする。$(a,b)\le(c,d)$ が (1) によるとすると $(c,d)\le(a,b)$ は成り立たず矛盾が生じる。$(c,d)\le(a,b)$ が (1) によるとすると $(a,b)\le(c,d)$ は成り立たず矛盾が生じる。よって、いずれも (2) によらなければならない。このとき $a=c$ であって、$b\le d$ かつ $d\le b$ となるので $b=d$ である。よって $(a,b)=(c,d)$ である。
   - $(a,b)\le(c,d)$ かつ $(c,d)\le(e,f)$ とする。いずれかが (1) によるならば $a<e$ となり、(1) より $(a,b)\le(e,f)$ である。両方が (2) によるとする。このとき $a=e$ であり、$b\le d$ かつ $d\le f$ なので $b\le f$ である。(2) により $(a,b)\le(e,f)$ である。

   以上で、これが順序であることが分かった。この順序が整列順序であることを示す。

   $X=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ とおき、その部分集合を Y とする。さらに $Y_1=\{a\in\mathbb{N}\mid$ ある $b\in\mathbb{N}$ があって $(a,b)\in Y\}$ とおく。Y が空でないから Y_1 も空ではない。Y_1 は $\mathbb{N}$ の部分集合で、$\mathbb{N}$ は整列集合なので Y_1 には最小元 a_0 が存在する。

   次に $Y_2=\{b\in\mathbb{N}\mid(a_0,b)\in Y\}$ とおく。a_0 の決め方から Y_2 は空でない $\mathbb{N}$ の部分集合で、したがって最小元 b_0 もつ。このとき a_0,b_0 の決め方から (a_0,b_0) は Y の最小元である。

11. (解答例 1)
   $S=\{a,b,c\}$ とし、関係 $\le$ を $\le=\{(a,a),\ (b,b),\ (c,c),\ (a,b),\ (a,c)\}$ で定める。すなわち

   $$a\le a,\ b\le b,\ c\le c,\ a\le b,\ a\le c$$

   であり、その他の組については順序は定まらない。これが順序であることは容易に確かめられる。またこのとき b と c は極大元ではあるが、最大元ではない。

   (解答例 2)
   S を $|S|\ge 2$ なる集合とする。また $X=2^S-\{S\}$ とする。X は集合の包含関係によって順序集合となる (すなわち 2^S の順序部分集合である)。このとき、任意の $s\in S$ について $S-\{s\}$ は X の極大元であるが、最大元ではない。(解答例 1 は、この S として $|S|=2$ なるものを考えたものと本質的に同じである。)

12. $(A,\le)$ を全順序集合とし a をその極大元とする。このとき a が最大元であることをいう。

   $b\in A$ とする。このとき A が全順序集合であることから $a\le b$ または $b\le a$ である。a は極大なので $a\le b$ ならば $b=a$ である。よってこのときも $b\le a$ が成り立つ。したがって、常に $b\le a$ が成り立ち、よって a は最大元である。

   もちろん「全順序集合の極小元は最小元である」も正しく、同様に証明できる。

13. $(A,\le)$ を順序集合とし a,b をその最大元とする。a が最大元であるから $b\le a$ である。また b が最大元であるから $a\le b$ である。したがって $a=b$ である。よって最大元は唯一つである。

   最小元についても同様である。

14. $(A,\le)$ を順序集合とし a をその最大元とする。$b\in A$ が $a\le b$ を満たすとする。a が最大であるから $b\le a$ である。よって $a=b$ が成り立ち、a は極大元である。

   最小元についても同様である。

15. b を極大元とする。a が最大であるから $b\le a$ である。b が極大元であるから $b=a$ となる。よって A の極大元は a のみである。

   最小元、極小元についても同様である。

16. $\mathbb{N}$ に自然な順序を考えれば、それは全順序集合であり、最大元をもたない。

17. 負の整数全体の集合に自然な順序を考えれば、それは全順序集合であり、最小元をもたないが最大元 -1 をもつ。

18. 正しくない。

   例えば $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に辞書式順序を考えれば、それは整列集合である。また $(1,1)\le(2,1)$ であるが、任意の $n\in N$ に対して $(1,1)\le(1,n)\le(2,1)$ であるから、このようなものは無限個ある。

19. 正しくない。

$S = \{a, b, c, d\}$ とし、関係 $\leq$ を $\leq = \{(a, a),\ (b, b),\ (c, c),\ (d, d),\ (a, c),\ (a, d),\ (b, c),\ (b, d)\}$ で定める。このとき c, d はいずれも条件を満たしているが、この二つに順序がない ($c \leq d$ でも $d \leq c$ でもない) ので、それは最小ではない。

20. (1)
- $a \in S$ に対して $a = a1$ で $1 \in S$ であるから $a \preceq a$ である。
- $a \preceq b$ かつ $b \preceq a$ とする。ある $c, d \in S$ が存在して $b = ac,\ a = bd$ となる。$a \neq 0$ とする。このとき $a = bd = acd$ となるが、$c, d \in S$ より $c = d = 1$ でなくてはならない。よって、このとき $a = b$ である。$a = 0$ ならば $b = ac = 0$ で、このときも $a = b$ である。
- $a \preceq b$ かつ $b \preceq c$ とする。ある $d, e \in S$ が存在して $b = ad,\ c = be$ となる。このとき $c = be = ade$ で $de \in S$ であるから $a \preceq c$ である。

以上より $(S, \preceq)$ は順序集合である。

(2) 任意の $a \in S$ に対して $0 = a \times 0$ であるから $a \preceq 0$ である。よって 0 は最大元であり、また極大元でもある。更に極大元は 0 に限る。

任意の $a \in S$ に対して $a = 1 \times a$ であるから $1 \preceq a$ である。よって 1 は最小元であり、また極小元でもある。更に極小元は 1 に限る。

21. 順序集合ではない。

なぜならば $1 \preceq -1$ かつ $-1 \preceq 1$ であるが $1 \neq -1$ である。

22. $(X, \leq)$ を順序集合とし $|X| < \infty$ とする。$x, y \in X$ に対して $x \leq y$ かつ $x \neq y$ であることを $x < y$ または $y > x$ と書くことにする。

$(X, \leq)$ が極小元を持たないと仮定する。$x_1 \in X$ を任意にとる。x_1 は極小ではないので $x_2 < x_1$ となる $x_2 \in X$ が存在する。これを繰り返せば

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$$

なる無限列を得る。$i > j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ に対して $x_i < x_j$ なので $x_i \neq x_j$ である。よって $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ は無限集合となる。しかし $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ は有限集合 X の部分集合なので、これは矛盾である。

23. $\{x, y, z\} = \{a, b, c\}$ として、その順序集合としての型を分類すると

(1)
$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] \\ y \arrow[d] \\ z \end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ y & & z \end{tikzcd}$$

(3)
$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \\ & z & \end{tikzcd}$$

(4)
$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & y \\ z & \end{tikzcd}$$

(5)
$$x \qquad y \qquad z$$

となる。すなわち

(1) $\{(x, x), (y, x), (z, x), (y, y), (z, y), (z, z)\}$ であり、x, y, z の選び方で 6 通りある。

(2) $\{(x, x), (y, x), (z, x), (y, y), (z, z)\}$ であり、x, y, z の選び方で 3 通りある。

(3) $\{(x, x), (z, x), (y, y), (z, y), (z, z)\}$ であり、x, y, z の選び方で 3 通りある。

(4) $\{(x, x), (z, x), (y, y), (z, z)\}$ であり、x, y, z の選び方で 6 通りある。

(5) $\{(x, x), (y, y), (z, z)\}$ であり、x, y, z の選び方は 1 通りしかない。

よってすべてで 19 個の順序がある。このうち、全順序は (1) のみなので、それは 6 個である。

24. (1) f は単射であるとする。
- 任意の $x \in X$ に対して $f(x) \preceq f(x)$ であるから $x \leq x$ である。
- $x \leq y,\ y \leq x$ とする。$f(x) \preceq f(y),\ f(y) \preceq f(x)$ であるから $f(x) = f(y)$ である。また f は単射なので $x = y$ である。
- $x \leq y,\ y \leq z$ とする。$f(x) \preceq f(y),\ f(y) \preceq f(z)$ である。よって $f(x) \preceq f(z)$ となり $x \leq z$ である。

以上より $(X,\le)$ は順序集合である。

f が単射でないとする。$x,y\in X$ で $x\ne y,\ f(x)=f(y)$ となるものが存在する。このとき $f(x)\preceq f(y)$ より $x\le y$ であり、$f(y)\preceq f(x)$ より $y\le x$ である。よって $x\le y$ かつ $y\le x$ であっても $x=y$ とは限らず、$(X,\le)$ は順序集合ではない。

X を順序集合、Y をその部分集合とする。Y の X への埋め込みは単射であるから、この方法で Y も順序集合になる。これが順序部分集合である。

(2) 任意の $x,x'\in X$ に対して $f(x)\preceq f(x')$ または $f(x')\preceq f(x)$ が成り立つので $x\le x'$ または $x'\le x$ となり $(X,\le)$ は全順序集合である。

(3) A を X の空でない部分集合とする。$f(A)$ は Y の空でない部分集合である。Y は整列集合なので $f(A)$ は最小元 y をもつ。このとき $y\in f(A)$ なので、ある $a\in A$ が存在して $f(a)=y$ である。a が A の最小元であることを示す。$b\in A$ とする。$f(a)$ が $f(A)$ の最小元であり、$f(b)\in f(A)$ であることから $f(a)\preceq f(b)$ である。よって $a\le b$ である。したがって a は A の最小元である。

空でない部分集合が最小元をもつので X は整列集合である。

25. $R_0=\{(x,x)\mid x\in X\}$ が求めるものである。実際 R_0 が順序であることはすぐに分かる。また、任意の順序 R について $(x,x)\in R\ (\forall x\in X)$ であるから $R_0\subset R$ である。

4.2 同値関係

26. 以下 3 つの条件が成り立つとき、関係 $\sim$ は同値関係であるという。

- (反射律) 任意の X の元 x に対して $x\sim x$ である。
- (対称律) X の元 $x,\ y$ に対して、$x\sim y$ ならば $y\sim x$ が成り立つ。
- (推移律) X の元 $x,\ y,\ z$ に対して、「$x\sim y$ かつ $y\sim z$」 ならば $x\sim z$ が成り立つ。

27. 同値関係とはいえない。

$A\sim B$ かつ $B\sim C$ とする。A と B の共通の趣味が、例えば「読書」であり、B と C の共通の趣味が「音楽鑑賞」であれば、A と C は必ずしも共通の趣味をもつわけではない。したがって $A\sim C$ とはいえない。

28. 問 26 の条件を 3 つ確認すればよい。

- E を単位行列とする。任意の $M(n,\mathbb{R})$ の元 X に対して、$X=XE$ より、$X\sim X$ である。
- $X\sim Y$ とする。ある正則行列 P が存在して $Y=XP$ となる。このとき $X=YP^{-1}$ である。よって $Y\sim X$ となる。
- $X\sim Y$ かつ $Y\sim Z$ とする。ある正則行列 $P,\ Q$ が存在して $Y=XP,\ Z=YQ$ となる。したがって、$Z=(XP)Q=X(PQ)$ となり $X\sim Z$ である。

以上より、関係 $\sim$ は集合 $M(n,\mathbb{R})$ 上の同値関係である。

29. 問 26 の条件を 3 つ確認すればよい。

- E を単位行列とする。任意の $M(n,\mathbb{R})$ の元 X に対して、$X=E^{-1}XE$ より、$X\sim X$ である。
- $X\sim Y$ とする。ある行列 P が存在して $Y=P^{-1}XP$ となる。このとき $X=(P^{-1})^{-1}Y(P^{-1})$ である。よって $Y\sim X$ となる。
- $X\sim Y$ かつ $Y\sim Z$ とする。ある正則行列 P,Q が存在して $Y=P^{-1}XP,\ Z=Q^{-1}YQ$ となる。したがって、$Z=Q^{-1}(P^{-1}XP)Q=Q^{-1}P^{-1}XPQ=(PQ)^{-1}X(PQ)$ となり $X\sim Z$ である。

以上より、関係 $\sim$ は集合 $M(n,\mathbb{R})$ 上の同値関係である。

30.
- 任意の 2^X の元 A に対して、恒等写像は A から A への全単射である。よって $A\sim A$ が成り立つ。
- $A\sim B$ とする。全単射 $f:A\to B$ が存在する。このとき逆写像 $f^{-1}:B\to A$ が存在してこれも全単射である。よって $B\sim A$ となる。
- $A\sim B$ かつ $B\sim C$ とする。全単射 $f:A\to B,\ g:B\to C$ が存在する。このとき合成写像 $g\circ f:A\to C$ も全単射である。よって $A\sim C$ である。

31.
- $\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}$ より $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{x}$ である。
- $\boldsymbol{x}\sim\boldsymbol{y}$ とする。$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{y}$ となる $0\ne\alpha\in\mathbb{R}$ が存在し、このとき $\boldsymbol{y}=\alpha^{-1}\boldsymbol{x}$ なので $\boldsymbol{y}\sim\boldsymbol{x}$ である。

- $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{z}$ とする。$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y} = \beta \boldsymbol{z}$ となる $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$ が存在する。このとき $\boldsymbol{x} = \alpha\beta \boldsymbol{z}$ で $\alpha\beta \neq 0$ なので $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{z}$ である。

以上より $\sim$ は同値関係である。

同値類は、原点を通る一つの直線上の点の集合から原点を除いたものである。

同値類の代表としては、例えば単位球面上の点の集合で、原点に関して対称な二つの点のうち、片方だけを集めたものとなる。具体的には $\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n {x_i}^2 = 1,\ \ x_i$ のうち 0 でないはじめの成分は正 $\}$ などである。

32.
- $x \in X$ に対して $f(x) = f(x)$ なので $x \sim x$ である。
- $x \sim y$ とする。$f(x) = f(y)$ なので $f(y) = f(x)$ となり $y \sim x$ である。
- $x \sim y, y \sim z$ とする。$f(x) = f(y), f(y) = f(z)$ なので $f(x) = f(z)$ となり $x \sim z$ である。

以上より $\sim$ は同値関係である。

$x \in X$ を含む同値類は $\{y \in X \mid f(y) = f(x)\} = f^{-1}(f(x))$ である。

類別は $X = \bigcup_{a \in f(X)} f^{-1}(a)$ である。

a の動く範囲を A とすると $f^{-1}(a) = \emptyset$ となることもあるので、$a \in f(X)$ とする方が好ましい。

33. (1)
- 任意の $\mathbb{Z}$ の元 x に対して、$x - x = 0 = 2 \cdot 0$ となる。よって $x \sim x$ である。
- $x \sim y$ とする。ある整数 ℓ が存在して、$x - y = 2\ell$ である。このとき $y - x = -2\ell = 2(-\ell)$ で、$-\ell$ は整数だから、$y \sim x$ である。
- $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とする。ある整数 k, ℓ が存在して $x - y = 2k, y - z = 2\ell$ となる。このとき $x - z = (x - y) + (y - z) = 2k - 2\ell = 2(k - \ell)$ となって、$k - \ell$ は整数だから、$x \sim z$ である。

(2) $C_0 = \{x \mid x \sim 0\} = \{x \mid x = x - 0 = 2\ell\ (\ell \in \mathbb{Z})\} =$ (偶数全体の集合),
$C_1 = \{x \mid x \sim 1\} = \{x \mid x - 1 = 2\ell\ (\ell \in \mathbb{Z})\} = \{x \mid x = 2\ell + 1\ (\ell \in \mathbb{Z})\} =$ (奇数全体の集合)。

(3) $\mathbb{Z} = C_0 \cup C_1$ だから、$(\mathbb{Z}/\sim) = \{C_0,\ C_1\}$

34. (1) $x \equiv y \pmod n$ であるとは、適当な整数 ℓ が存在して、$x - y = n\ell$ となることである。

(2)
- $x - x = 0 = n \cdot 0$ なので $x \equiv x \pmod n$ である。
- $x \equiv y \pmod n$ とする。ある $\ell \in \mathbb{Z}$ が存在して $x - y = n\ell$ である。このとき $y - x = n(-\ell)$ なので $y \equiv x \pmod n$ である。
- $x \equiv y \pmod n, y \equiv z \pmod n$ とする。ある $\ell, \ell' \in \mathbb{Z}$ があって $x - y = n\ell, y - z = n\ell'$ である。このとき $x - z = (x - y) + (y - z) = n\ell + n\ell' = n(\ell + \ell')$ なので $x \equiv z \pmod n$ である。

(3) $\{a + \ell n \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$

(4) $\{0, 1, 2, \cdots, n - 1\}$ (完全代表系は一意的ではないので、これ以外にも色々とある。)

(5) $\mathbb{Z} = \bigcup_{a=0}^{n-1} \{a + \ell n \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$

(6) $10 \equiv 1 \pmod 9$ だから、以下、 $\pmod 9$ で考えると、$493256823 \equiv 4 + 9 + 3 + 2 + 5 + 6 + 8 + 2 + 3 = 9 + (4 + 3 + 2) + 5 + (4 + 2) + 8 + (1 + 1) + 3 \equiv (5 + 4) + 2 + (8 + 1) + 1 + 3 \equiv 2 + 1 + 3 = 6$ つまり、余りは 6 である。

結局 9 で割ったときの余りを求めるとき、各位の和から、9 を取り除いていけばよい。(九去法)

(7) $2x - 5y = 1$ に対して、 $\pmod 5$ で考えると、$2x \equiv 1$ だから、$x = 5k + 3\ (k \in \mathbb{Z})$ となる。よって、問題の式に代入すると、$1 = 2(5k + 3) - 5y = 10k + 6 - 5y$ より、$y = 2k + 1$ である。つまり、$(x,\ y) = (5k + 3,\ 2k + 1)$ である。

35. Jordan 標準形として同じ行列をもつものすべての集合。

36.
- $y \in Y$ とする。R は同値関係だから $(y, y) \in R$ で、$(y, y) \in R \cap (Y \times Y) = R'$、すなわち $yR'y$ である。
- $y, z \in Y$ とし $yR'z$ とする。$(y, z) \in R' \subset R$ で R は同値関係なので $(z, y) \in R$ である。また $y, z \in Y$ なので $(z, y) \in R \cap (Y \times Y) = R'$ である。よって $zR'y$ である。
- $y, z, u \in Y$ とし $yR'z$ かつ $zR'u$ とする。$(y, z) \in R' \subset R$, $(z, u) \in R' \subset R$ で R は同値関係なので $(y, u) \in R$ である。また すなわち $yR'u$ である。

以上より R' は Y 上の同値関係である。

37.
- $x \in X$ とする。$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ であるから、ある $\lambda \in \Lambda$ があって $x \in X_\lambda$ となり、よって $x \sim x$ である。
- $x \sim y$ とする。ある $\lambda \in \Lambda$ があって $x, y \in X_\lambda$ となり、$y \sim x$ も成り立つ。

- $x \sim y$, $y \sim z$ とする。ある $\lambda, \mu \in \Lambda$ があって $x, y \in X_\lambda$, $y, z \in X_\mu$ となる。このとき $y \in X_\lambda \cap X_\mu$ である。$\lambda \neq \mu$ ならば $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ であるから $\lambda = \mu$ である。よって $x, z \in X_\lambda$ となり $x \sim z$ である。

以上より $\sim$ は X 上の同値関係である。

集合 X を空でない部分集合の共通部分のない和集合に書くとき、これを X の**分割**という。同値関係による類別は分割である。また、この問題により、任意の分割は同値関係を定めることが分かる。よって、同値関係を与えることと、分割を与えることは本質的に等しい。

38. 同値関係を満たすためには以下の表のようにすればよい。

	1	2	3	4	5	6
1	○	○	○			
2	●	●	●			
3	●	●	○			
4				●		○
5					○	
6				●		●

よって求める関係は $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,4),(4,6),(5,5),(6,4),(6,6)\}$ である。

同値類が $\{1,2,3\}$, $\{4,6\}$, $\{5\}$ であることを読み取り、同じ同値類の任意の 2 元の組からなるものを求めればよい。

39. $(x,y) \in R$ とする。このとき R が同値関係であるから $(y,x) \in R$ である。また R が順序であるから $(x,y) \in R$ かつ $(y,x) \in R$ より $x = y$ となる。したがって $R \subset \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ である。

逆に任意の $x \in X$ に対して、R が同値関係であることから $(x,x) \in R$ である。よって $\{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\} \subset R$ である。

以上より $R = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ となる。

40. X 上の関係とは $X \times X$ の部分集合である。したがってその数は $2^{|X \times X|} = 2^9 = 512$ である。X 上の同値関係は X の同値類への分割 (いくつかの空でない部分集合の共通部分のない和集合への分解) に対応する (問 37 参照)。それは

$$\begin{aligned} X &= \{1,2,3\} \\ X &= \{1\} \cup \{2,3\} \\ X &= \{2\} \cup \{1,3\} \\ X &= \{3\} \cup \{1,2\} \\ X &= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \end{aligned}$$

ですべてであるから、その個数は 5 である。

41. $A \sim B$ のとき $\det A = \det B$ であることを示せばよい。$A \sim B$ とする。ある正則行列 P があって $B = P^{-1}AP$ である。よって $\det B = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = (\det P)^{-1}(\det A)(\det P) = \det A$ となる。したがって f は矛盾なく定義できる。

42. (1) 矛盾なく定義できるためには「$a+m\mathbb{Z} = b+m\mathbb{Z}$ のとき $a+n\mathbb{Z} = b+n\mathbb{Z}$」であればよい。$m+m\mathbb{Z} = 0+m\mathbb{Z}$ であることに注意すれば $n \mid m$ でなければならない。逆に $n \mid m$ とする。$m = nd$ $(d \in \mathbb{N})$ とする。$a+m\mathbb{Z} = b+m\mathbb{Z}$ とすると、ある $\ell \in \mathbb{Z}$ があって $a - b = m\ell = nd\ell$ である。よって $a + n\mathbb{Z} = b + n\mathbb{Z}$ である。

    以上より f が矛盾なく定義できるための必要十分条件は $n \mid m$ である。

    (2) $a + n\mathbb{Z} = a' + n\mathbb{Z}$ かつ $b + n\mathbb{Z} = b' + n\mathbb{Z}$ とする。ある $s, t \in \mathbb{Z}$ があって $a - a' = sn$, $b - b' = tn$ である。このとき $(a+b) - (a'+b') = (a-a') + (b-b') = sn + tn = (s+t)n$ となるから $(a+b) + n\mathbb{Z} = (a'+b') + n\mathbb{Z}$ となり f は矛盾なく定義される。

43. (1) $X \times X$ は任意の関係を含む同値関係であるから、$X \times X$ が求めるものである。

    (2) $X = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ とする。$R = X \times X$ とおくと R を含む関係は R のみである。$(a,b) \in R$, $(b,a) \in R$ で $a \neq b$ なので R は順序ではない。よって R を含む順序は存在しない。

44. X は空集合でないとし、R を空集合とすればよい。$x \in X$ について (x,x) は順序、および同値関係に含まれなくてはならないが、R がそれを含まないので、任意の部分集合もそれを含まない。

45. (1)
    - 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して $r - r = 0 \in \mathbb{Z}$ なので $r \sim r$ である。

- $r \sim s$ とする。$a = r - s$ とおくと $a \in \mathbb{Z}$ である。このとき $s - r = -a \in \mathbb{Z}$ であるから $s \sim r$ である。
- $r \sim s, s \sim t$ とする。$a = r-s, b = s-t$ とおくと $a, b \in \mathbb{Z}$ である。このとき $r-t = (r-s)+(s-t) = a+b \in Z$ となり $r \sim t$ である。

以上より $\sim$ は同値関係である。

(2) $\{r + a \mid a \in \mathbb{Z}\}$

(3) 例えば $[0, 1)$ が完全代表系である。(完全代表系は一意ではないので、これ以外にも色々と考えられる。)

(4) $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in [0,1)} \{r + a \mid a \in \mathbb{Z}\}$

46. (1)
- 任意の $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の元 (a, b) に対して、$ab = ab$ であるから、$a \sim b$ である。
- $(a, b) \sim (c, d)$ とする。このとき $ad = bc$ である。よって $bc = ad$ であるから、$(c, d) \sim (a, b)$ である。
- $(a, b) \sim (c, d)$, $(c, d) \sim (e, f)$ とする。$ad = bc$, $cf = de$ である。よって $adf = bcf = bde$ である。ここで $d \in \mathbb{N}$ なので $d \neq 0$ であり、$af = be$ となる。したがって $(a, b) \sim (e, f)$ が成り立つ。

以上から、関係 $\sim$ は集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係である。

(2) $[a, b] = [a', b']$, $[c, d] = [c', d']$ と仮定する。$[ac, bd] = [a'c', b'd']$ であることを示せばよい。
$[a, b] = [a', b']$ より $ab' = a'b$ である。$[c, d] = [c', d']$ より $cd' = c'd$ である。よって $(ac)(b'd') = (a'c')(bd)$ が成り立ち $[ac, bd] = [a'c', b'd']$ である。

(3) $[a, b] = [a', b']$, $[c, d] = [c', d']$ と仮定する。$[ad + bc, bd] = [a'd' + b'c', b'd']$ であることを示せばよい。
$[a, b] = [a', b']$ より $ab' = a'b$ である。$[c, d] = [c', d']$ より $cd' = c'd$ である。このとき

$$(ad + bc)b'd' = ab'dd' + bb'cd' = a'bdd' + bb'c'd = (a'd' + b'c')bd$$

であるから $[ad + bc, bd] = [a'd' + b'c', b'd']$ である。

この同値関係による同値類は有理数と一対一に対応している。

(2011/02/08)

5 難しいこと

5.1 濃度

1. (1) A から B への単射が存在する。

   (2) $|A| \leq |B|$ であって $|B| \leq |A|$ ではない。

   (3) A から B への全単射が存在する。

2. $|A| \leq |B|$ の定義が「A から B への単射が存在する」ということなので、これは第 3 章問 35 (1) によって示される。

3. 「$|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |A|$ ならば、 $|A| = |B|$ である。」言い換えると「単射 $A \to B$ と単射 $B \to A$ が存在するならば、全単射 $A \to B$ が存在する。」

4. 定義より単射 $f : A \to B$ と単射 $g : B \to C$ が存在する。このとき合成写像 $g \circ f : A \to C$ も単射になるので $|A| \leq |C|$ である。

5. 定義より $|A| \leq |B|, |A| \neq |B|, |B| \leq |C|, |B| \neq |C|$ が成り立つ。問 4 より $|A| \leq |C|$ である。よって $|A| \neq |C|$ を示せばよい。

   $|A| = |C|$ と仮定する。このとき A から C への全単射が存在し、その逆写像を考えれば C から A への全単射 $f : C \to A$ が存在する。$|A| \leq |B|$ より、単射 $g : A \to B$ が存在する。このとき合成写像 $g \circ f : C \to B$ は単射で $|C| \leq |B|$ となる。よって Bernstein の定理より $|B| = |C|$ となって仮定に矛盾する。

6. (1) $f(x) = (b - a)x + a$

   (2) $f(x) = a - 1 + 1/(1 - x)$

   (3) $f(x) = a - 1 + 1/(1 - x)$

   (4) $f(x) = a + 1 - 1/x$

   (5) $f(x) = a + 1 - 1/x$

   (6) $S = \{1/2^m \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ とする。$x \notin S$ のとき $f(x) = x$、$x \in S$ のとき $f(x) = x/2$ で f を定めれば、これが全単射になる。

   (7) (6) の f を $(0, 1]$ に制限したもの。

   (8) $f(x) = 1 - x$

   (9) $f(x) = x/(1 - x^2)$

   これによって実数の区間はすべて等しい濃度をもつことが分かる。

7. a が偶数のとき $f(a) = a/2$、a が奇数のとき $f(a) = (1 - a)/2$ とすれば、この f は全単射である。

8. $f(a, b) = 2^{a-1}(2b - 1)$

9. $r \in \mathbb{Q}$ を既約分数の形に書き、その分母を r_1, 分子を r_2 とする。分母は正であるとし、整数については、その分母を 1 とする。これによって写像 $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, r \mapsto (r_1, r_2)$ が定義でき、作り方から単射である。したがって $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$ である。問 2, 7, 8 より $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ となるので $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$ である。

   一方、自然な埋め込み $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ があるので $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ である。よってベルンシュタインの定理により $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ である。

10. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ なので $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ である。よって $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ であること、すなわち $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への全単射が存在しないことをいえばよい。$I = (0, 1)$ を開区間とする。$|I| = |\mathbb{R}|$ なので $\mathbb{N}$ から I への全単射が存在しないことをいえば十分である。$f : \mathbb{N} \to I$ を全単射とする。$(0, 1)$ の元を無限小数として表し

$$
\begin{array}{rcl}
f(1) & = & 0.a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \cdots \\
f(2) & = & 0.a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \cdots \\
f(3) & = & 0.a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \cdots \\
 & & \cdots
\end{array}
$$

   と表すことにする。このとき、$b \in I$ を少数第 i 位が $f(i)$ と異なるように作る。そうすれば b は、どの $f(i)$ とも異なるので f が全単射であることに矛盾する。したがって $\mathbb{N}$ から I への全単射は存在しない。

11. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ を、

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{if } x\in\{0\}\cup\mathbb{N}\\ x & \text{if } x\notin\{0\}\cup\mathbb{N}\end{cases}$$

で定めるとこれは全単射である。

12. $f:X\to 2^X$ $(f(x)=\{x\})$ は単射なので $|X|\le|2^X|$ である。$|2^X|\le|X|$ と仮定する。ベルンシュタインの定理より、全単射 $g:X\to 2^X$ が存在する。

$$R=\{x\in X \mid x\notin g(x)\}$$

とおく。$R\in 2^X$ であり、g は全単射なので $R=g(y)$ となる $y\in X$ が存在する。$y\in R$ とすると $y\notin g(y)=R$ で矛盾、$y\notin R$ とすると $y\in g(y)=R$ でやはり矛盾である。したがって、このような全単射は存在せず $|X|<|2^X|$ である。

すべてのものを含む集合が存在するとすれば、それは最大の濃度をもつはずであるが、この関係式によって、最大の濃度をもつ集合は存在しない。したがって、すべてのものを含むものは集合ではない。

13. $I=(0,1)$ (開区間) とする。$|\mathbb{R}|=|I|$ であるから $|I\times I|=|I|$ を示せばよい。また $f:I\to I\times I$ $(f(a)=(a,0.5))$ は単射なので $|I|\le|I\times I|$ である。$I\times I$ から I への単射を構成すればベルンシュタインの定理によって $|I\times I|=|I|$ である。

任意の $a\in I$ は $0.a_1a_2a_3\cdots$ と無限 10 進小数で表すことができる。ここで $0.1=0.999\cdots$ などと表し、有限少数は許さないこととする。$g:I\times I\to I$ を

$$g(0.a_1a_2\cdots,\ 0.b_1b_2\cdots)=0.a_1b_1a_2b_2\cdots$$

で定義すると、これは単射である。

したがって $|\mathbb{R}\times\mathbb{R}|=|I\times I|=|I|=|\mathbb{R}|$ となる。

14. $x\in X-Y$ とする。$x_1=x$ として、帰納的に $x_{i+1}=f(x_i)$ $(i\in\mathbb{N})$ とする。ただし $x_{i+1}=f(x_i)\in Y\subset X$ と見る。これによって X の部分集合 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が得られる。これがすべて異なることをいえば、$\mathbb{N}\to X$ $(i\mapsto x_i)$ は単射となり $|\mathbb{N}|\le|X|$ である。

$S=\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid i<j\}$ とおき、これを辞書式順序による整列集合 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ の順序部分集合と見れば、これも整列集合である。$T=\{(i,j)\in S\mid x_i=x_j\}$ とおく。$T=\emptyset$ を示せばよいので、$T\neq\emptyset$ として矛盾を導く。

$T\neq\emptyset$ とすると、S が整列集合であることから T は最小元 (i_0,j_0) をもつ。$x_1\notin Y$ であり $j>1$ に対しては $x_j\in Y$ であるから、$x_1\neq x_j$ である。よって $i_0>1$ である。また $i_0<j_0$ であるから $j_0>1$ も成り立つ。このとき $x_{i_0}=x_{j_0}$ より $f(x_{i_0-1})=f(x_{j_0-1})$ である。f は単射なので $x_{i_0-1}=x_{j_0-1}$ である。よって $(i_0-1,j_0-1)\in T$ である。しかし、これは (i_0,j_0) の最小性に反する。したがって $T=\emptyset$ である。

集合 X について、ある真の部分集合 Y との間に全単射が存在するとき、X を**無限集合**と定義することもある。したがって、この問は自然数の濃度 $|\mathbb{N}|$ (これを $\aleph_0$ とかき**アレフゼロ**とよむ) が無限集合の濃度のうち最小であることを示している。

15. 単射 $f:X\to\mathbb{N}$ が存在する。このとき $\mathbb{N}$ の順序によって X の順序を定めれば、それは整列順序である。すなわち、$x,y\in X$ に対して $f(x)\le f(y)$ のとき $x\le y$ と定めるのである。(第 4 章問 24 参照)

5.2 選択公理

16. 集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える。任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して A_λ は空でないとする。このとき、「各 A_λ からいっせいに一つずつ元を取り出すことができる。」

これは次のように言い換えることもできる。「直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ は空でない。」

選択公理を他の標準的な公理から導くことはできない。したがって、これを使うにはこれを公理として仮定しなくてはならない。しかし Λ が有限集合であれば、他の標準的な公理から導くことができる。したがって、有限個の集合族に対して用いる場合には注意する必要はない。また、各 A_λ が可算集合 (あるいは整列集合) であれば、やはり他の標準的な公理から導くことができる。

17. 任意の集合は整列順序をもつ。

18. 帰納的順序集合は極大元をもつ。

「選択公理」、「整列可能定理」、「Zorn の補題」の三つは互いに同値であることが分かっている。すなわちこのうちのどれか一つを仮定すれば、残りの二つが証明できるのである。

19. 任意の $b \in B$ に対して $f^{-1}(b) \neq \emptyset$ である。各 $b \in B$ に対して $f^{-1}(b)$ から一つ元を取り、それを $g(b)$ とする (ここで選択公理を使っている)。このとき $g : B \to A$ は単射である。

第 3 章問 36 とこの問により、選択公理を仮定すれば、X から Y への全射が存在することと、Y から X への単射が存在することは同値となる。

20. 集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考え、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ は空でないとする。$A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とおく。整列可能定理より A に整列順序が存在する。この順序によって、各 A_λ も整列集合となる。このとき A_λ は (唯一つの) 最小元をもつので、それを選ぶことによって A_λ からいっせいに一つずつ元を選ぶことが出来る。

21. (証明 1)
単射 $f : A \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を構成する。$x \in A$ に対して、ある $\lambda \in \Lambda$ があって $x \in A_\lambda$ である。したがって $\Lambda(x) = \{\lambda \in \Lambda \mid x \in A_\lambda\}$ とおけば、これは空ではない。$\{\Lambda(x)\}_{x\in A}$ に選択公理を用いて、写像 $g : A \to \Lambda$ が得られ、$x \in A_{g(x)}$ である。このとき $f : A \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を $f(x) = (x, g(x))$ で定めれば、これは単射となる。

(証明 2)
$f : \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to A$ を $f(x, \lambda) = x$ で定める。これが全射であることを示せば、選択公理と問 19 より単射 $g : A \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ が存在する。
$x \in A$ とする。ある $\lambda \in \Lambda$ が存在し $x \in A_\lambda$ である。このとき $(x, \lambda) \in \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ であり $f(x, \lambda) = x$ である。よって f は全射である。

$|\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda|$ を $\sum_{\lambda\in\Lambda} |A_\lambda|$ とも書く。特に $|\Lambda| < \infty$ である場合には $|A_1| + \cdots + |A_n|$ などの記号も用いる。

22. $\mathcal{S}$ を I を含む真のイデアル全体の集合とする。$I \in \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S} \neq \emptyset$ である。$\mathcal{S}$ を集合としての包含関係によって順序集合と考える。$\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathcal{S}$ の全順序部分集合とする。$J = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$ とおく。このとき J は R のイデアルで I を含む。また、各 $\lambda \in \Lambda$ について、A_λ は R の真のイデアルなので $1 \notin J_\lambda$ である。よって $1 \notin J$ となり $J \in \mathcal{S}$ である。したがって $\{J_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は上界 J をもち、上に有界である。よって $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合となり、ツォルンの補題によって極大元 M をもつ。このとき M は R の極大イデアルであり I を含む。

(2011/02/08)