2018 年度偏微分方程式と量子論：演習問題 1

佐々木 格

2018 年 10 月 3 日

1 数学的準備 1

1. $\int_0^\infty x^3 e^{-ax} dx,\ a > 0$ を計算せよ。
2. 次が成り立つ事を説明せよ。（ヒント：等比級数の和の公式）
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty x^3 e^{-nx} dx$$
3. $\sum_{n=1}^\infty 1/n^4$ の値を思い出せ（→熱・波動方程式論）。
4. 積分 $\int_0^\infty x^3/(e^x - 1) dx$ を求めよ。

2 プランクの輻射公式

温度 T の光に満ちた空洞の単位体積あたりエネルギーのうち，角振動数が $(\omega, \omega + d\omega)$ の範囲にある分のエネルギーを $\widetilde{u}_T(\omega) d\omega$ とする[*1]。プランクの輻射公式によれば，$\widetilde{u}_T(\lambda)$ は

$$\widetilde{u}_T(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

で与えられる。ここに $\hbar$ はプランク定数，c は光速度，k_B はボルツマン定数である。

(i) $\widetilde{u}_T(\omega)$ が最大となる $\omega = \omega_{\max}(T)$ を求め，それが温度 T に比例する事を確認せよ。ただし，$3(1 - e^{-s}) = s$ の $s \neq 0$ の解を D とおいてよい。$D = 2.83\cdots$ である。

(ii) 温度 T にある空洞の中の全エネルギー $E(T) = \int_0^\infty u_T(\omega) d\omega$ を計算せよ。$E(T)$ は T のどんな関数か？

(iii) 東京ドーム $1.24 \times 10^6 \mathrm{m}^3$ の内部が温度 $26.85°\mathrm{C} = 300K$ の真空であるとする。このとき東京ドームの中に満ちている光のエネルギーを求めよ。これと 1 円玉を 1cm 持ち上げるために必要なエネルギーは，どちらがどれだけ大きいか？ただし，$k_B, \hbar, c$ の値は参考書で調べよ。

[*1] 波長 λ を角振動数で表すと $\lambda = 2\pi c/\omega$。