2018 年度偏微分方程式と量子論：演習問題 2

佐々木 格

2019 年 1 月 14 日

$\boxed{3}$ 2 次元調和振動子の定常波

原点とバネでつながれた粒子を考える。ばね定数を k，粒子の質量を m とする。粒子は平面内を運動するものとし，粒子が位置 $\mathbf{x} = (x, y)$ にいるときに加わるバネの力は $-k\mathbf{x}$ とする。

(a) 粒子は半径 a の円運動をしているとする。このとき，粒子の運動量の大きさ p 及びエネルギー E を a を用いて表せ。

(b) 粒子は実は波（de Broglie 波）であり，その波長は $\lambda = 2\pi\hbar/p$ であると考える事にしよう。de Broglie 波は円運動の軌道上で定常状態になっているとする。このとき円運動の半径 a と波長 λ はどのような関係式をみたすべきか？

(c) (b) によれば，半径および波長はとびとびの値 $a_n, \lambda_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ をとる。ただし $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ とする。これらの定常状態におけるエネルギー E_n を求めよ。

$\boxed{4}$ 規格化，確率の計算

α を正の定数，β を実定数とする。

(a) 1 次元の量子状態を $\psi(x) = N_1(x + \beta i)e^{-\alpha|x|/2}, (x \in \mathbb{R})$ で定義する。規格化定数 $N_1 > 0$ を求めよ。

(b) 1 次元的に運動する量子力学的粒子が状態 ψ にある。この状態において位置を観測したときに，粒子を区間 $[a, b]$ に見出す確率を求めよ。ただし $0 < a < b$ とする。

(c) 3 次元の量子状態を $\varphi(\mathbf{x}) = N_2 x e^{-\alpha|\mathbf{x}|^2}$ で定義する。ただし，$\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ である。規格化定数 N_2 を求めよ。