2018 年度偏微分方程式と量子論：演習問題 3

佐々木 格

2018 年 12 月 16 日

5 確率と確率の流れ

(i) 3 次元空間におけるシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(\mathbf{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x})\right)\psi_t(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

に従う粒子を考える。粒子の「確率の流れの密度」$\mathbf{j}$ を

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) := \frac{\hbar}{2im}\left(\overline{\psi_t(\mathbf{x})}\nabla\psi_t(\mathbf{x}) - \overline{\nabla\psi_t(\mathbf{x})}\psi_t(\mathbf{x})\right)$$

で定義する。連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi_t(\mathbf{x})|^2 + \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0$$

が成り立つ事を示せ。

(ii) x 軸上を 1 次元的に運動する粒子を考える。粒子の状態 $\psi_t(x)$ は 1 次元シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_t(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

に従うものとする。確率の流れの密度 $j(t, x)$ は何になるか書け。そして

$$\frac{d}{dt}\int_a^b |\psi_t(x)|^2 dx = j(t, a) - j(t, b)$$

が成り立つことを示せ。これは区間 $[a, b]$ の中にある粒子の存在確率の変化が点 a から確率の流入量と b における流出量に等しいことを示している。

6 偏極恒等式

内積空間 $\mathcal{H}$ とは，$\psi, \phi \in \mathcal{H}$ に対して内積 $\langle\psi, \phi\rangle$ が定義されたベクトル空間のことである。ここでは，内積は複素内積であるとする。つまり $\langle\psi, \phi\rangle$ は ψ について反線形，ϕ について線形である。$\|\psi\| := \langle\psi, \psi\rangle^{1/2}$ をノルムという。

(i) 実数 a, b の積 ab を $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ を用いて表わせ。

(ii) 複素数 α, β について $\bar{\alpha}\beta$ を $s_1 := |\alpha+\beta|^2$, $s_2 := |\alpha-\beta|^2$, $s_3 := |\alpha+i\beta|^2$, $s_4 := |\alpha-i\beta|^2$ を用いて表わせ。

(iii) 複素内積 $\langle\psi, \varphi\rangle$ をノルム $\|\cdots\|$ のみを用いて表せ。