2018 年度偏微分方程式と量子論：演習問題 4

佐々木 格

2018 年 11 月 28 日

$\boxed{7}$ エルミート演算子

演算子 A について，任意の ψ, φ に対し $\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle B\psi, \varphi \rangle$ を満たす演算子 B を A のエルミート共役，または共役演算子と呼び $A^\dagger$ と書く。$A^\dagger = A$ を満たす演算子をエルミート演算子という。

(1) エルミート演算子の期待値は常に実数である事を示せ。

(2) 逆に任意の ψ に対して $\langle \psi, A\psi \rangle$ 実数ならば，A はエルミートである事を示せ。（ヒント：偏極恒等式）

$\boxed{8}$ エルミート共役

複素数値関数 $f(x), g(x)$ の内積を $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx$ で定義する。ただし f, g は何回でも微分可能で，f, g 及びその導関数は遠方で十分早く減衰していると仮定する。$\hat{x}$ は x を掛ける掛け算演算子とする。

(1) 次の演算子のエルミート共役を求めよ：

$$\text{(i)}\ \ \hat{x} \qquad \text{(ii)}\ \ i\hat{x} \qquad \text{(iii)}\ \ \frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{(iv)}\ \ i\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{(v)}\ \ i\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

(2) $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ とする。$2\hat{x}\hat{p} - i\hbar$ がエルミートであることを示せ。

$\boxed{9}$ 期待値と分散

$a > 0, k \in \mathbb{R}$ とし，次の 1 次元の状態

$$\psi_1(x) = N_1 e^{-\frac{1}{2}ax^2 - ikx} \tag{1}$$

$$\psi_2(x) = \frac{N_2}{x^2 + a^2} \tag{2}$$

を考える。

(1) 規格化定数 N_1, N_2 を求めよ。

(2) 状態 $\psi_j (j = 1, 2)$ について座標 $\hat{x}$ と運動量 $\hat{p}$ を観測するときの，観測値の平均値 $\langle \psi_j, \hat{x}\psi_j \rangle, \langle \psi_j, \hat{p}\psi_j \rangle$ をそれぞれ求めよ。

(3) 状態 $\psi_j (j = 1, 2)$ における $\hat{x}$ と $\hat{p}$ のゆらぎ $\Delta x, \Delta p$ をそれぞれ計算せよ。

$\boxed{10}$ 交換子の計算

ここでは演算子の上につけていた記号『̂』を省略する。

(1) 任意の演算子 A, B, C についてライプニッツ則 (Leibnitz rule)

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C], \qquad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \tag{3}$$

が成り立つ事を示せ。これは積の微分法則 $(fg)' = f'g + fg'$ に似ている。

(2) 演算子 $A, B_1, B_2, \cdots, B_n$ について

$$[A, B_1 B_2 \cdots B_n] = \sum_{k=1}^{n} B_1 \cdots B_{k-1} [A, B_k] B_{k+1} \cdots B_n \tag{4}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 上の公式を用いて交換子 $[\hat{x}, \hat{p}^n]$ を計算せよ。

(4) 上の計算結果を用いて

$$[\hat{x}, e^{ia\hat{p}}] \tag{5}$$

を計算せよ。ただし a は実数で $e^{ia\hat{p}} := \sum_{n=0}^{\infty} (ia\hat{p})^n / n!$。