2018 年度偏微分方程式と量子論：演習問題 5

佐々木 格

2019 年 1 月 14 日

$\boxed{11}$ エルミート演算子の固有値

A をエルミート演算子とする。

1. 「複素数 λ が A の固有値である」という事の定義を書け。
2. A の固有値は実数であることを示せ。
3. A の異なる固有値に属する固有関数は互いに直交することを示せ。
4. 一次独立な ψ_1, ψ_2 が，ある実数 λ に対して $A\psi_j = \lambda\psi_j$ $(j = 1, 2)$ を満たしている（同時固有状態という）。このとき，A の固有値 λ に属する規格化された固有関数 φ_j $(j = 1, 2)$ で，$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle = 0$ を満たすものが取れることを示せ。

$\boxed{12}$ 射影演算子

規格化された状態 u を一つ固定し，演算子 $\hat{P}$ を

$$\hat{P}\psi = \langle u, \psi\rangle\, u$$

と定義する。ψ は任意の状態である。$\hat{P}$ を u への射影演算子という。

(i) $\hat{P}$ がエルミートであること，つまり $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$ となる事を示せ。
(ii) $\hat{P}^2 = \hat{P}$ を示せ。
(iii) $\hat{P}$ の固有値は 0 と 1 だけであることを示せ。また固有値 1 に属する固有ベクトルを求めよ。

注意：$\hat{P}$ は『状態 u に対しては 1，u に直交する状態に対しては 0 となる 物理量』である。ある規格化された波動関数 ψ について『ψ が u である確率』は $\langle\psi, F\psi\rangle = |\langle u, \psi\rangle|^2$ によって与えられる。

$\boxed{13}$ 1 次元周期的な量子系

x 軸の区間 $[0, L]$ を運動する質量 m の粒子を考える。$x = 0$ と $x = L$ は輪っかのようにつながっているものとする。この量子系のエネルギー固有値および固有状態を求めたい。定常的シュレディンガーの固有値方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(x) = Eu(x), \qquad 0 < x < L, \tag{1}$$

$$u(0) = u(L), \quad u'(0) = u'(L) \tag{2}$$

である。(2) は $x = 0, L$ で波動関数が滑らかにつながるための条件である。

1. この方程式を解き，すべての 固有値 E_n と (規格化された) 固有ベクトル u_n を求めよ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$。ただし $E_1 \le E_2 \le E_3 \le \cdots$ とする。
2. 上で求めた固有値 E_n の多重度 (縮退度) はいくつか？[*1]
3. 得られた固有関数は正規直交系である事，つまり $\langle u_n, u_m\rangle = \delta_{n,m}$ となること，を確かめよ。
4. $\{u_n\}_n$ は完全正規直交系であることを示せ[*2]。

[*1] 固有値 E の多重度とは，固有値 E を持つ固有ベクトルで一次独立なものの個数である。
[*2] 熱・波動方程式論の講義を参照。この問題は試験の範囲外とする。

14 水素様原子の基底状態

原子番号 Z の原子核と一個の電子からなる量子系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\mathbf{x}|}$$

で与えられる (ただし $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$)。$\hat{H}$ の基底状態は $u(\mathbf{x}) = Ne^{-a|\mathbf{x}|}$ の形をしている事が分かっている。

(i) $\hat{H}u = Eu$ となるように定数 a を定めよ。またそのときの E を求めよ。

(ii) 規格化定数 N を求めよ。

15 ベータ崩壊における電子の励起

原子番号 Z の原子核に電子が 1 個だけ束縛されていて，基底状態 u_Z にある状況を考えよう。あるとき，原子核中の一つの中性子 n がベータ崩壊（$\mathrm{n} \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$）を起こして原子番号が $Z+1$ になったとする[*3]このとき，最初に基底状態にあった電子が励起される確率を求めよ。

ヒント：励起されない確率を計算すればよい。u_Z が新しい原子核の基底状態 u_{Z+1} にとどまる確率は $|\langle u_Z, u_{Z+1}\rangle|^2$ で与えられるので，励起される確率を求めるには 1 からこの値を引けばよい。

[*3] 中性子が電子（とニュートリノ）を放出して陽子に変化した。