2018 年度偏微分方程式と量子論：演習問題 6

佐々木 格

2019 年 1 月 23 日

16 調和振動子の固有状態

$\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ を生成・消滅作用素とする。u_0 は $\hat{a}u_0 = 0$ 満たす規格化された状態とする。

$$u_n := \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n u_0$$

とするとき，u_n は規格化された状態であることを示せ。

17 調和振動子の固有状態の具体形

$\alpha := \sqrt{m\omega/\hbar}$ とし，$\xi := \alpha x$ とおく。ここでは ξ による掛け算演算子を $\hat{\xi}$ と書く事にする。

(i) $\hat{a}^\dagger = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\xi} - \dfrac{d}{d\xi}\Big)$ を示せ。

(ii) $\hat{a}^\dagger = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\hat{\xi}^2/2}\dfrac{d}{d\xi}e^{-\hat{\xi}^2/2}$ を示せ。

(iii) 次を示せ。

$$(\hat{a}^\dagger)^n = \Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big)^n e^{\hat{\xi}^2/2}\frac{d^n}{d\xi^n}e^{-\hat{\xi}^2/2}$$

(iv) $n = 0, 1, 2, \cdots$ を非負整数とする。次で定義される関数 $H_n(x)$ をエルミート多項式という。

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \qquad H_0(x) = 1.$$

$H_1(x), H_2(x), H_3(x)$ を計算せよ。

(v) $H_{n+1}(x)$ を $H_n(x)$ を用いて表わせ。また $H_n(x)$ が n 次多項式であることを示せ。

(vi) 調和振動子の基底状態を ξ の関数として表すと $u_0 = (\alpha/\pi)^{1/2}\exp(-\xi^2/2)$ である。調和振動子の第 n 励起状態 $u_n = (n!)^{-1/2}(\hat{a}^\dagger)^n u_0$ は

$$u_n(x) = \Big(\frac{\alpha^2}{\pi}\Big)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n(\xi)e^{-\xi^2/2}, \qquad \xi = \alpha x$$

となることを示せ。また u_0, u_1, u_2 を ξ の関数として図示せよ。

18 2 次元調和振動子の固有状態

2 次元調和振動子のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$$

で与えられる。2 次元的な量子状態 $\psi = \psi(x, y), \varphi = \varphi(x, y)$ の内積は

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(x, y)}\varphi(x, y)dxdy$$

で定義されるものとする。

(1) $u_n(x)$ を 1 次元調和振動子の第 n 励起状態とし，$\Phi_{n,m}(x,y) = u_n(x)u_m(y)$ と置く。$\Phi_{n,m}$ は $\hat{H}$ の固有関数であることを示せ。また対応する固有値 $E_{n,m}$ は何か？このエネルギー準位 $E_{n,m}$ と問題 [3] で算出したエネルギー準位 E_n を比べよ。

(2) $\{\Phi_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ は正規直交系であることを示せ。

(3) $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ が 1 次元量子系の完全正規直交系であることを用いて，$\{\Phi_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ は 2 次元量子系の完全正規直交系であることを示せ。

(3) $\hat{H}$ の固有ベクトルは $\{\Phi_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ が全てであることを説明せよ ($\hat{H}$ の固有状態は $\{\Phi_{n,m}\}_{n,m}$ の線型結合で表される事を示せばよい。)。

19 Heisenberg 方程式 (自由粒子)

1 次元的な自由粒子ハミルトニアンを $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$ とする。Heisenberg 演算子 $\hat{x}(t), \hat{p}(t)$ を

$$\hat{x}(t) := e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{x}e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \qquad \hat{p}(t) := e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{p}e^{-i\hat{H}t/\hbar} \tag{1}$$

で定義する。

(i) 方程式

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \frac{\hat{p}(t)}{m}, \qquad \frac{d}{dt}\hat{p}(t) = 0 \tag{2}$$

が成り立つことを示せ。

(ii) $\hat{x}(0) = \hat{x}$, $\hat{p}(0) = \hat{p}$ に注意し，上の Heisengerg 方程式を解き $\hat{x}(t)$, $\hat{p}(t)$ を求めよ。

(iii) 初期状態 $\psi_0(x) = Ne^{-ax^2/2+ikx}$, $a > 0, k \in \mathbb{R}$ の時間発展 $\psi_t := e^{-i\hat{H}t/\hbar}\psi_0$ を考える。規格化定数 $N > 0$ を求めよ。

(iv) 時刻 t の状態 $\psi_t(x)$ における位置，運動量の期待値

$$\langle x\rangle_t := \langle\psi_t, \hat{x}\psi_t\rangle, \qquad \langle x\rangle_t := \langle\psi_t, \hat{p}\psi_t\rangle,$$

を求めよ。

(v) 時刻 t の状態 $\psi_t(x)$ における位置，運動量の分散の 2 乗

$$(\Delta x)_t^2 := \left\langle\psi_t, \hat{x}^2\psi_t\right\rangle - \langle x\rangle_t^2, \qquad (\Delta p)_t^2 := \left\langle\psi_t, \hat{p}^2\psi_t\right\rangle - \langle p\rangle_t^2,$$

を求めよ。

20 Heisenberg 方程式（調和振動子）

ばね定数を $k = m\omega^2$ とする 1 次元のバネを考える。ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \tag{3}$$

で与えられるものとする。

(i) 演算子

$$\hat{x}(t) := e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{x}e^{-i\hat{H}t/\hbar}, \qquad \hat{p}(t) := e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{p}e^{-i\hat{H}t/\hbar} \tag{4}$$

の満たす Heisenberg の運動方程式を求めよ。

(ii) (i) の運動方程式を解き，時刻 t における演算子 $\hat{x}(t), \hat{p}(t)$ を求めよ。