熱・波動方程式論：演習問題 6

佐々木 格

$\boxed{13}$ Cesáro 和の収束

Cesáro 和 $\sigma_N(f)$ を考える。練習問題 3 $\boxed{9}$ の (1)〜(5) で定義された各関数 $f(t)$ について，それぞれ，以下のうち成り立つものをすべて選べ。

(i) (各点収束) すべての $t \in [-\pi, \pi)$ に対して $\lim_{N\to\infty} \sigma_N(f,t) = f(t)$

(ii) (一様収束) $\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in[-\pi,\pi)} |\sigma_N(f,t) - f(t)| = 0$

(iii) (L^2 収束) $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_N(f,t) - f(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$

(iv) (L^1 収束) $\lim_{n\to\infty} \|\sigma_N(f,t) - f(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0$

$\boxed{14}$ Fourier 級数の収束

Fourier 級数の部分和 $S_N(f,t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int}$ を考える。練習問題 3 $\boxed{9}$ の (1)〜(5) で定義された各関数 $f(t)$ について，それぞれ，以下のうち成り立つものをすべて選べ。

(i) (各点収束) すべての $t \in [-\pi, \pi)$ に対して $\lim_{N\to\infty} S_N(f,t) = f(t)$

(ii) (一様収束) $\lim_{N\to\infty} \sup_{t\in[-\pi,\pi)} |S_N(f,t) - f(t)| = 0$

(iii) (L^2 収束) $\lim_{n\to\infty} \|S_N(f,t) - f(t)\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$

(iv) (L^1 収束) $\lim_{n\to\infty} \|S_N(f,t) - f(t)\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0$

$\boxed{15}$ Parseval の等式の応用

練習問題 3 $\boxed{9}$ の (1),(2),(5) で定義された各関数 $f(t)$ について，Parseval の等式を適用することにより次の級数を計算せよ。

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2-\mu^2)^2}$，ただし μ は整数でない実数とする。

$\boxed{16}$ Fourier sin 級数

$L^2([-\pi,\pi])$ の部分空間 $L^2_{\mathrm{odd}}([-\pi,\pi])$ を

$$L^2_{\mathrm{odd}}([-\pi,\pi]) = \{f \in L^2([-\pi,\pi]) | f(-t) = -f(t), t \in [-\pi,\pi]\}$$

で定義する。この空間の内積は $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$ で定義されるものとする。

(1) $u_n := \sqrt{2}\sin nt$ とするとき $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2_{\mathrm{odd}}([-\pi,\pi])$ の正規直交系であることを示せ。

(2) 任意の $f \in L^2_{\mathrm{odd}}([-\pi,\pi])$ に対して

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_n, f\rangle$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\{\sqrt{2}\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^2_{\mathrm{odd}}([-\pi,\pi])$ の完全正規直交系であることを示せ（Parseval の等式を示せばよい）。

(4) 関数空間 $X := L^2([0,\pi])$ の内積を $\langle f,g\rangle_X = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \overline{f(t)}g(t)dt$ で定める $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X の完全正規直交系であることを示せ ((3) と Parseval の等式を使えばよい)。つまり $[0,\pi]$ の任意の可積分関数 $f(t)$ に対して L^2 収束の意味で

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(s)\sin nsds\right)\sin nt$$

が成り立つ。