変分法・解析力学：演習問題 4

$\boxed{10}$ 二階の微分方程式

関数 $y = f(x)$ についての二階の微分方程式は一般的に $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ と書かれる。F が x に依存しない場合，すなわち $F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ の形の微分方程式は，次の手順 (i) で一階の微分方程式に直すことができる事を示せ。

(i) $y = f(x)$ を x について逆に解き $x = f^{-1}(y)$ と書く。そして y を変数として，y の関数を $p = f'(x) = f'(f^{-1}(y))$ で定義すると，$F(y, y', y'') = 0$ は

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0 \tag{1}$$

と同値である。

(ii) (これは (iii) へのヒントなので解答不要。) (1) が定数 C を用いて $p = \varphi(y, C)$ となれば，$F(y, y', y'') = 0$ の解

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C)} + C' \tag{2}$$

が得られる。これは x が y の関数として得られたわけだが，$y = f(x)$ の形にしたければ逆関数を作ればよい。

(iii) 微分方程式 $f(x)f''(x) - f'(x)^2 - 1 = 0$ の一般解は

$$f(x) = \frac{1}{C_1}\cosh(C_1x + C_2) \tag{3}$$

で与えられることを示せ。