

## 第 II 部

# 数式処理システム SageMath

## 23 数式処理システム SageMath とは

SageMath(以下, Sage と略す) は代数・幾何・数論・数値計算等の広範囲の数学をサポートする数式処理プログラムです。実際の数学の研究でも利用されています。Sage は Python 言語で書かれていて, Sage のプログラムは Python の文法で書きます。Sage を使うことによって, 行列の計算, 数値計算, 組み合わせ論, 特殊関数, 微分方程式の解法といった様々な数学的な計算を手軽に行うことができます。Sage はフリーでオープンソースなソフトウェアですので, だれでも自由に入手して使うことが可能です。Sage は Linux, Mac, Windows で利用可能です。

## 24 Sage 実行方法

Sage の実行方法は主に次の 4 種類あります:

1. インタラクティブ・シェル (端末からコマンド `sage` で起動する CUI)
2. Sage のプログラムが書いてあるファイルを呼び出して実行 (端末で `sage` ファイル名.`sage` とする)
3. Sage ノートブックを使う (インタラクティブ・シェルから `notebook()` で起動)
4. Sage のインタラクティブシェルからロードする (`sage:load('ファイル名.sage')`)

以下では, まず, 1 と 2 について解説します。

### 24.1 Sage のインタラクティブシェルの起動

Sage がインストールされている PC では, 端末 (ターミナル) から `sage` と入力することによって Sage を起動することができます。端末で

```
1 | user@debian:~$ sage # SageMathを起動$
```

と入力すると

```
1 | ┌───────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┐
2 | | SageMath version 8.2, Release Date: 2018-05-05 |
3 | | Type "notebook()" for the browser-based notebook interface. |
4 | | Type "help()" for help. |
5 | └───────────────────────────────────────────────────────────────────────────────────┘
6 | sage:
```

と表示され, Sage のインタラクティブ・シェルが起動します。ここでは Python のシェルと同じ事ができますが, それに加えて Sage ならではの機能が使えます。試しに `1+2` や `factor(2010)` 等と入力してみましょう:

```
1 | sage: 1+2
2 | 3
3 | sage: factor(2010)
4 | 2 * 3 * 5 * 67
```

ここで `factor` というのは, 因数分解を行う関数で, Sage にははじめから組み込まれています。

Sage を終了して元の端末の状態に戻るには『exit』または『quit』を入力します。

```
1 | sage: exit
2 | Exiting Sage (CPU time 0m0.06s, Wall time 2m8.71s).
```

## 24.2 Sage のプログラムを作成して実行する

Python と同様に、Sage のプログラムをファイルに書いて端末から実行することができます。具体的な手順は次の通りです。

1. Sage プログラムをテキストエディタで書いて保存。ファイル名は『ファイル名.sage』とします。
2. 端末を起動し、ファイルの保存されているディレクトリへ移動し、

sage ファイル名.sage

と入力する。<sup>\*7</sup>

上の手順を試してみましょう。まず次のファイルを作ります。

- ファイル名：**testfactor.sage**

```
1 | a = factor(2014)           # 2014の因数分解の結果をaとする
2 | print a                   # aをプリントする。
```

そして、端末でファイルの位置までディレクトリを移動して次のように実行します：

```
1 | $ sage testfactor.sage
2 | 2 * 19 * 53
3 | $
```

この場合、Python の場合と同様に、出力したい値は `print` で書かなければ表示されません。

Python と同じ事ですが、出力結果をファイルに保存したい場合、次のようにします：

```
1 | $ sage testfactor.sage > testfactor.txt
2 | $
```

すると実行したディレクトリに `testfactor.txt` というファイルが作られて、実行結果がこのファイルに記録されます。

## 25 Sage の Web ページについて

Sage に関する情報は公式ウェブサイト

<http://www.sagemath.org/>

から得ることができます。トップページのメニューから次の情報にアクセスできます：

- Try Sage Online：インターネットから Sage 利用することができます。
- Documentation：Sage や Python に関する説明書やチュートリアル。解説ビデオなどもあります。
- Download：Sage のダウンロード (インストール方法は OS によって異なります)。
- Sage Feature Tour：いろいろな活用方法が紹介されています。

<sup>\*7</sup> ⑧ ファイルと異なるディレクトリから実行する場合はディレクトリも付けたファイル名を書きます。

## 26 他の環境での Sage の利用

### 26.1 SageMathCloud

インターネットに接続されている環境では Sage の Online 版が使えます。Sage の Web サイト <http://www.sagemath.org/>へ行き、Try Sage Online をクリックします。自分用のアカウントを作成してサインインすれば、Sage ノートブックが利用できるようになります。

### 26.2 Windows に Sage をインストールする

SageMath8.0 から Windows がネイティブにサポートされました。インストールは次のように行います。

1. SageMath のダウンロード用のミラーサイト

<http://ftp.riken.jp/sagemath/win/index.html>

から SageMath-\*\*.exe をダウンロードします (xx はバージョンによって異なります。)

2. ダウンロードが完了したらファイルを実行することにより、インストールが始まるので画面の指示に従ってインストールします。

### 26.3 Mac での利用

以下は <http://www.sagemath.org/mirror/osx/README.txt> の解説を翻訳したものです\*8。

自宅の PC が Max OS X の場合、インストールは次のように行います。

1. まず Sage の Web サイトの download から適当なサーバーを選んで sage の dmg ファイルをダウンロードします。新しい mac なら CPU は intel だと思いますので、**intel** をクリック、OS のバージョンが 10.10 で 64bit マシンなら `sage-xx-x86_64-Darwin-OSX-10.10_x86_64-app.dmg` をダウンロードします。ファイル名に `-app` が付いているのは通常の Mac のアプリケーションとして起動するファイルで、`-app` が付いていないものは、伝統的な Unix command-line として起動するファイルだそうです。おそらく通常は名前に `-app` が付いているものをダウンロードすればよいとおもいます。
2. dmg ファイルをダブルクリックします。
3. sage フォルダを適当にアプリケーションのフォルダにドラッグします。
4. finder でコピーした sage フォルダへ移動して『sage』のアイコンをダブルクリック。
5. Select to run it with "Terminal":  
Choose Applications, then select "All Applications" in the "Enable:" drop down. Change the "Applications" drop down to "Utilities". On the left, scroll and select "Terminal". Click "Open", then in the next dialog select "Update".
6. Sage の Window がポップアップします。
7. Sage ノートブックを起動する場合は、`notebook()` とタイプし、firefox か safari で URL : <http://localhost:8000> を入力します。

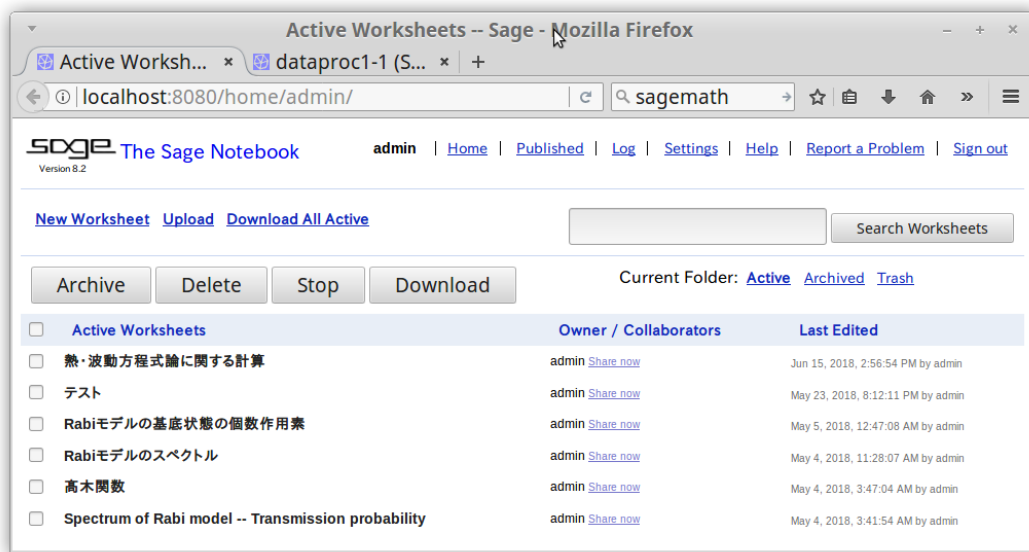
\*8 私自身 Mac を持っていないので動作確認していません。うまくいかないことがあるかもしれませんが、各自がんばってください。

## 27 Sage ノートブック

端末から Sage を起動した後に Sage のコマンドラインから `notebook()` を入力することで Sage ノートブックが起動します。

```
1 | sage: notebook()
```

すると firefox などのウェブブラウザが起動し次のような画面が現れます。これが Sage のノートブックです。初回起動時にパスワードが聞かれますが、適当に覚えやすいものを入力しておきます\*9。



この画面で worksheet が開いていなければ、New Worksheet をクリックして開きます。最初にワークシートの名前を決めます。Sage のプログラムは四角い枠 (セル) の中に書きます。試しに  $1+2$  を計算してみましょう。セルに  $1+2$  と書き、次のどちらかの方法でセルに書かれたプログラムを実行します。

- `shift+enter`
- セルの右下にある `evaluate` をクリック

Sage ノートブックを終了するには、ブラウザを閉じ `notebook()` と入力した端末で `ctrl+c` を押すと Sage のインタラクティブシェルに戻ります。`exit` と入力すれば Sage が終了します。

## 28 Sage での数の取り扱い

### 28.1 四則演算

Sage の四則演算は、基本的には Python と同じですが、記号『/』は異なります。整数  $a, b$  に対して Python2 では  $a/b$  は商を返しましたが、Sage では  $a/b$  が割り切れないときには、有理数  $a/b$  となります。また、冪の記号は Python では  $a^b$  は `a**b` でしたが、Sage では『 $a^b$ 』のように書きます。

$$a + b \rightarrow a+b \quad a - b \rightarrow a-b \quad a \times b \rightarrow a*b \quad \frac{a}{b} \rightarrow a/b \quad a^b \rightarrow a^b$$

\*9 毎年、授業でユーザーネームとパスワードを忘れる人がいるので、ここでは共通になるように、`username = admin, password = sagesage` としてください。

## 28.2 数の表示

Sage では自然数, 有理数, 有限体を取り扱うことができ, 無理数は形式的に取り扱うことができます。円周率  $\pi$  は `pi`, 自然対数の底  $e$  は `e`, 虚数単位  $i$  は `i` で表されます。次の命令を順次実行して確認してみましょう:

```
1 | pi
```

---

実行結果の例

```
pi
```

数値を表示するには `n()` という命令を使います:

```
1 | n(pi)
```

---

実行結果の例

```
3.14159265358979
```

円周率を 30 桁だけ表示するには:

```
1 | n(pi, digits=30)
```

---

実行結果の例

```
3.141592653589793238462643383279502884197
```

自然対数の底についても同様に

```
1 | n(e)
```

---

実行結果の例

```
2.71828182845905
```

平方根 (square root) は次のようになります:

```
1 | sqrt(3)
```

---

実行結果の例

```
sqrt(3)
```

平方根の計算は厳密に行われ

```
1 | sqrt(3)*sqrt(3)
```

---

実行結果の例

```
3
```

となります。e や pi と同様に  $\sqrt{3}$  の近似値は `n(sqrt(3))` で計算します。

## 28.3 Sage で文字 n を使うときの注意

Sage では文字 `n` に, `n(a)` で『a の数値を返す』という命令があらかじめ割り当てられているので, 文字 `n` は特に理由がなければ使わないようにしましょう。

## 28.4 複素数

Sage では虚数単位  $i$  は `I` で表され, 複素数  $5 + 3i$  は `5+3*I` のように表します。複素数の計算は実数の場合と同じように行うことができます。

```

1 | sage: (5+3*I)^2
2 | 30*I + 16
3 | sage: a = 5+3*I; a.conjugate() # 複素共役
4 | -3*I + 5
5 | sage: exp(pi*I)
6 | -1 # Eulerの公式が使える

```

## 28.5 数学定数

Sage ではじめから定義されている数学定数は  $e$  や  $\pi$  の他には次のようなものがあります。

名前	数学記号	Sage の記法	定義
黄金比 (golden ratio)	$\phi$	golden_ratio	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
オイラーの定数 (Euler's constant)	$\gamma$	euler_gamma	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$
カタランの定数 (Catalan's constant)	$K$	catalan	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$
双子素数の定数 (twin prime)	$C_2$	twinprime	$\prod_{p \geq 3; \text{素数}} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$

## 28.6 数の精度

数値計算をするときには常にどの精度で計算するのかを気にする必要があります。Sage で取り扱うことができる代表的な数の型に次のようなものがあります。

名前	Sage の記号	Sage の英語名	意味	精度
整数	ZZ	Integer Ring	整数のつくる環	厳密
有理数	QQ	Rational Field	有理数体	厳密
代数的数	QQbar	Algebraic Field	$\mathbb{Q}$ の代数閉包	厳密
形式的な環	SR	Symbolic Ring	形式的な環 (ほぼ体)	厳密
実数 (53bit)	RR	Real Field with 53 bits of precision	53 ビットの実数	近似
実数 (53bit)	RDF	Real Double Field	倍精度浮動小数点実数	近似
複素数 (53bit)	CC	Complex Field with 53 bits of precision	53 ビットの複素数	近似
実数 (400bit)	RealField(400)		400 ビットの実数	近似

これらは必要に応じて使い分けます。高精度で計算すると少ない誤差で計算できますが、多くの計算時間がかかります。上記以外にも  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  や  $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$  などさまざまな環や体を取り扱うことができます。以下を実行して確かめてみましょう：

```

1 | sage: ZZ
2 | Integer Ring # 名前が出てきます。QQ, RR, SR等でも同様
3 | sage: 5 in ZZ # 5は整数か？
4 | True
5 | sage: 1.5 in ZZ
6 | False
7 | sage: 1.5 in QQ # 1.5は有理数か？
8 | True
9 | sage: sqrt(2) in QQ # ルート2は有理数ではない。
10 | False

```

```

11 | sage: sqrt(2) in QQbar # ルート2は代数的数である。
12 | True
13 | sage: x = var('x') # xを形式的な文字と定義する。
14 | sage: x in SR # 形式的に取り扱える文字
15 | True

```

円周率の精度は次のようになります：

```

1 | print pi
2 | print RDF(pi)
3 | print RR(pi)
4 | print RealField(200)(pi)

```

実行結果の例

```

pi
3.14159265359
3.14159265358979
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749

```

誤差が生じるのは次のような場合です，

```

1 | sage: a = RR(pi); exp(a*I)
2 | -1.0000000000000000 + 1.22464679914735e-16*I

```

厳密には  $e^{i\pi} = -1$  なので実数となるはずなのに，上の実行結果では虚数部分  $1.22464679914735e-16*I$  が残っています。これは数値計算から生じる誤差で，この絶対値は  $10^{-16}i$  程度なので非常に小さいですが，答えが実数でないために，以降のプログラムにエラーが生じることがあります。例えば実数値関数のグラフ描画 (plot) を使用としたときに関数の値に虚部があると，それがどんなに小さくてもエラーとなります。複素数値を含む関数の数値計算を取り扱う場合は，そのような注意を常におこななければなりません。

## 29 カーネルの初期化

Sage notebook では  $a=3$  と入力すると， $a$  が 3 であるという情報を持ち続けています。次に  $a=5$  と入力すれば， $a$  の値は 5 に変わります。Sage が記憶している 変数の情報をリセット するにはノートブックから『Action...』 → 『Restart worksheet』をクリックします。

## 30 Sage ノートブックの補完機能

端末では，ディレクトリ名やファイル名を途中まで入力して Tab キーを押すとキーワードが自動的に補完されますが，Sage ノートブックも同様の機能を持っています。Sage ノートブックで `diff` と入力して Tab キーを押してみましょう。diff と differences の 2 つの候補が出てきます。diffe まで入力してから Tab キーを押すと，differences が自動的に出てきます。ここで `diff` は微分をする命令で，`differences` は数列の差をとる命令です。

## 31 ノートブックの出力の整形

ノートブック画面の Typeset にチェックマークを入れると，命令の実行結果が数学の書式で整形された形で出力されます。Typeset にチェックマークを入れてからセルで次を実行してみましょう：

```

1 | integral(sin(x)*e^x, x)

```

Typeset にチェックマークを入れない場合はどのように表示されるだろうか？（試してみてください）

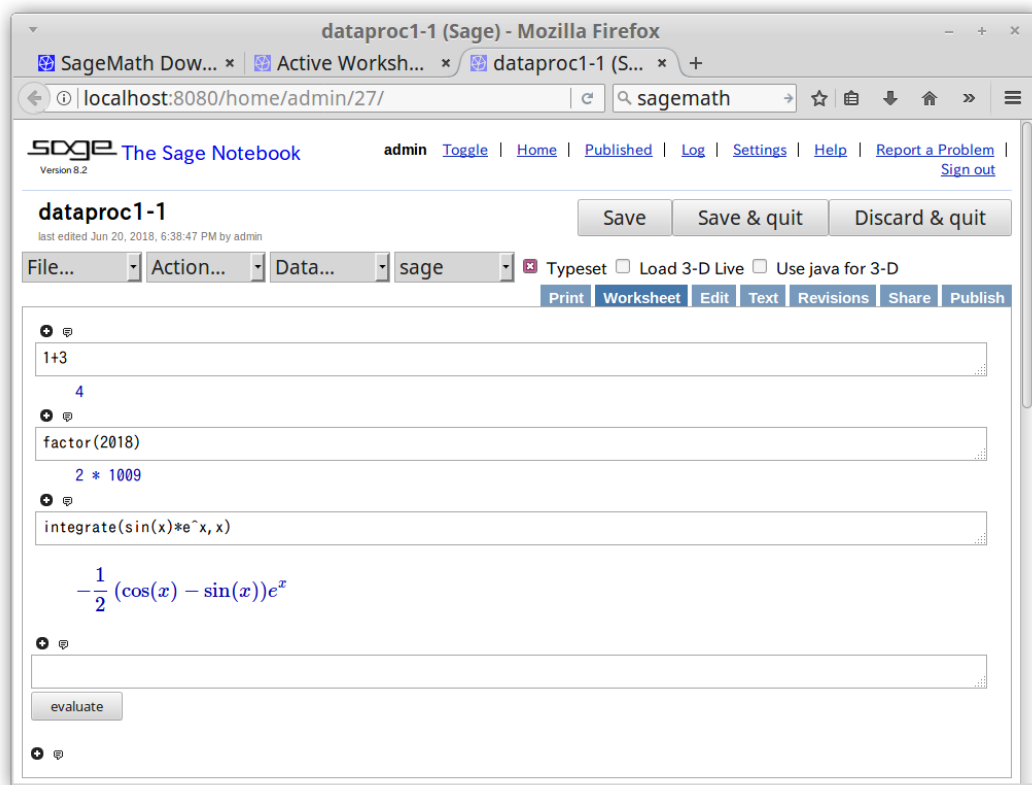


図 8 出力結果 : Typeset

## 32 Sage ワークシートの保存

Sage ノートブックのワークシートはファイルに保存することができます。ワークシートは Sage worksheet 形式 (sws) で保存されます。ワークシートの保存は Web ブラウザ<sup>\*10</sup>でファイルをダウンロードと同じ要領で行います<sup>\*11</sup>。Sage worksheet を保存する手順は次の通りです<sup>\*12</sup>。

1. Sage ワークシートを開いている状態で, [File...] → [Save worksheet to a file...] を順にクリック。
2. 保存するファイル名を聞かれるので, 入力して OK ボタンを押す。
3. Web ブラウザで通常のファイルのダウンロードの画面になるので, 『ファイルを保存する』を指定して OK ボタンを押す。
4. 保存するフォルダを指定する。

今回はファイル名を `sage01.sws` として, 『他のフォルダ』のデスクトップを選び, デスクトップにあるディレクトリ `dataproc1` に保存しておきましょう。ファイル名の拡張子は `sws` です。拡張子を変えてはいけません。

次に, ファイルに保存した worksheet のファイルを読み込む手順は次の通りです。

1. Sage notebook のトップページの左上にある `upload` をクリックする。
2. `Browse your computer to select a file to upload:` の下の「参照」を押して, 読み込むファイルを選択

\*10 いまは firefox

\*11 (ファイル→名前を付けてページを保存) ではありません!

\*12 その前にブラウザの設定を編集し, ダウンロードの設定で『ファイルごとに保存先を指定する』となるようにしておきましょう。



3. ファイルを選んだら [upload] ボタンを押す。

### 33 Sage のヘルプ

命令の後に『?』を書いて実行すると、その命令の使い方が表示されます。次を実行してみましょう：

```
1 | sum?
```

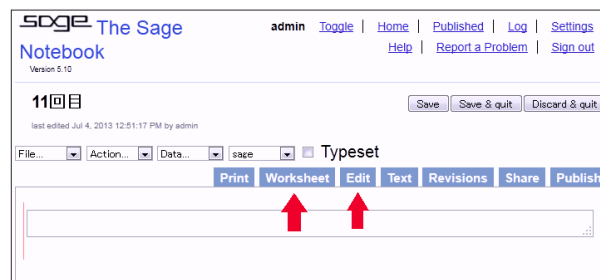
和 `sum` の使い方とその例が表示されたはずですが、さらに関数 `sum` を定義しているソースコードを表示するには次のようにします：

```
1 | sum??
```

## 34 Sage ワークシートの活用

### 34.1 ワークシートのソースとその編集

Sage ノートブックのセルの欄外には Word のようにタイトルや説明などを書くことができます。ここではその方法を紹介します。まず Sage ノートブックを開き New Worksheet を作ります。タブに『Worksheet』と『Edit』という項目がありますが、これらをクリックすることでワークシートとそのソースを切り替えます。



それでは Edit を押してみましょう。すると次のようなものが表示されます。

```
1 |
2 | {{{id=1|
3 |
4 | ///
5 | }}}
```

これがワークシートのソースです。Worksheet のタブをクリックすると先ほどのワークシートに戻ります。さて、試しに Worksheet のセルに

```
1 | integrate(sin(x), x)
```

と入力して実行してから、Edit タブをクリックしてソースを表示してみましょう。するとソースは次のように変わっています：

```
1 | # ここは欄外
2 | {{{id=1| # ここから一つの項目が始まる
3 | integrate(sin(x), x) # セルの内容
```

```

4  ///                      # 入力と出力の区切り
5  -cos(x)                  # セルの実行結果
6  }}}                      # 項目終了
7                            # ここは欄外
8  {{{id=2|                # 2つ目の項目の始まり
9                            # 二つ目のセルの内容
10 ///                     # 区切り
11 }}}                      # 2つめの項目の終わり

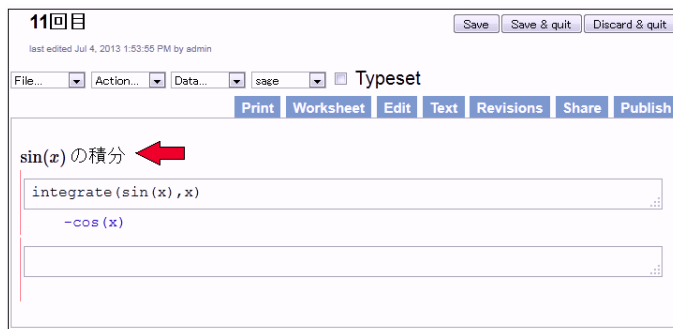
```

{{{id=1|の直後に、一つ目のセルの内容と実行結果が追加されているのがわかります。また、二つ目のセルが自動的に作られたのでその文だけソースが増えています。さて、上のテキストの1行目に

```
1   $\sin(x)$  の積分
```

と書いて、『Save changes』のボタンをクリックすると内容が更新されてワークシートが表示されます。下の図の矢印の部分のようになっていたら成功です：

このようにして、セルの欄外にタイトルを書いたり、解説や補足を書くことができます。また、簡単な L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の形式で数式を書くこともできます。数式を書くときは L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X と同じようにドルマーク \$ \$ で囲むか \[ \] の中に書きます。 \begin{equation}... \end{equation} 環境を使うこともできます。セルの欄外には html 形式を使うことができます。例えば html のコマンドを使って見出しを付けることで見やすいワークシートを作ることができます：



## 1. 積分

### 1.1 不定積分

不定積分  $\int \sin(x)dx$  を計算する

`integrate(sin(x), x)`

`-cos(x)`

### 1.2 定積分

定積分  $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$  を計算する

`integrate(sin(x), x, 0, pi)`

`2`

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

`integrate(1/(1+x^4), x, 0, oo)`

`1/4*pi*sqrt(2)`

上のワークシートのソースは次のようになっています：

```
1  <h1>1. 積分</h1>
```

```

2 <h2>1.1 不定積分 </h2>
3 不定積分  $\int \sin(x) dx$  を計算する
4
5 {{{id=1|
6 integrate(sin(x),x)
7 ///
8 -cos(x)
9 }}}
10
11 <h2> 1.2 定積分 </h2>
12 定積分  $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$  を計算する
13
14 {{{id=2|
15 integrate(sin(x),x,0,pi)
16 ///
17 2
18 }}}
19
20 \begin{equation}
21 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
22 \end{equation}
23
24 {{{id=3|
25 integrate(1/(1+x^4),x,0,oo)
26 ///
27 1/4*pi*sqrt(2)
28 }}}
29
30 {{{id=4|
31
32 ///
33 }}}

```

上のソースでは、<h1>見出し 1</h1>で 1 番目の見出しを書いています、2 番目の見出しは<h2> ... </h2>で囲んで書きます。Worksheet では html 形式のタグはすべて使えるのでフォントサイズを変えたり、太字にしたり、色を付けたりすることもできます。html の書き方はインターネットにいくらでもあるので必要に応じて調べてみましょう。

## 34.2 Sage ワークシートのドキュメントとしての機能

上のように、Sage ワークシートのソースを直接編集して、欄外にドキュメントを書くことができますが、もっと便利な方法があります。右の図のように、セルの外側にマウスカーソルを置くと青紫色の線が現れます：このとき、

Shift + マウス左クリック

を押すと、次の図のようにテキスト編集画面が現れます。

ここにテキストを書いてフォントの種類やサイズを変えたり、番号付けしたり、 $\text{L}^{\text{T}}\text{E}^{\text{X}}$  形式で数式を書いたりすることができます。

画像ファイルを貼り付けることもできます。記入したら、『Save Changes』をクリックすれば編集が反映されます。また、すでに編集した欄外の項目であれば、ダブルクリックするだけでテキスト編集画面が現れます。

このように、Sage Worksheet は、計算できる上に、ドキュメント形式としても十分な機能を持っているので、計算可能なドキュメントであるといえます。

## 35 練習問題

Sage のワークシート作成、ファイルに保存してみましょう。Sage ワークシートのファイル名は `sagews01.sws` とすること。ファイルを保存したら Sage ノートブックの画面の Upload からアップして、ワークシートが正常に読み込まれているか確認してみましょう。