


量子場の数理とその周辺 2023
アブストラクト集

Remarks on discrete Dirac operators and their continuum limits

 中村周



We discuss possible definitions of discrete Dirac operators, and discuss their continuum limits. It is well-known in the lattice field theory that the straightforward discretization of the Dirac operator introduces unwanted particles (spectral subspaces), and this phenomenon is known as the fermion doubling. In order to overcome this difficulty, two methods were proposed.

- (1) Introduce a new term, called the Wilson term;
- (2) The KS-fermion model or the staggered fermion model.

We discuss mathematical formulations of these, and study their continuum limits. The preprint is available at <https://arxiv.org/abs/2306.14180>.

Continuum limit for Laplace and elliptic operators on lattices

Yukihide Tadano (Tokyo University of Science)

This talk is devoted to continuum limit problems of discrete Schrödinger operators on lattices, which is based on a joint work with Keita Mikami (RIKEN) and Shu Nakamura (Gakushuin University).

The first part of this talk concerns the asymptotic behaviors of Laplace operators $H_h = H_{0,h} + V$ on general lattices $h\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ perturbed with a real-valued potential V on \mathbb{R}^d as the mesh size h tends to zero. We show that, when Λ is equipped with a graph structure, H_h converges to $H = H_0 + V$ in the generalized norm resolvent sense as $h \rightarrow +0$ under the same assumption on V as in our previous work Nakamura-Tadano (2021, JST), where $H_0 = p_0(D_x)$ is the second order elliptic operator associated to the given graph structure. It is also shown that, as an application of the above result, the continuum limit of the Laplacian on the hexagonal lattice Λ_{hex} , which is not a lattice in that $\Lambda_{\text{hex}} \not\cong \mathbb{Z}^2$, is $-\frac{3}{4}\Delta$ in the above-mentioned sense.

In the second part of this talk, we study the discretization H_h of a second order strictly elliptic operator H on \mathbb{R}^d onto the square lattice $h\mathbb{Z}^d$. We show that H_h converges to H as $h \rightarrow +0$ in the generalized norm resolvent topology.

Connes の非可換微分幾何学による素粒子理論の標準模型の再構成

原田雅樹


A. Connes の非可換幾何学の構想について、幾何学者 M. Atiyah は次のように述べる。

私はここで Connes の非可換微分幾何学について強調しておきたいと思う。Alain Connes は、この壮大と言ってもよい統一理論を掲げている。ここでもまたすべてのことが結びつけられている。この理論は、解析学、代数学、幾何学、トポロジー、物理学、数論を結び付け、これらのすべてが、この理論の中のある部分に貢献している。これは、微分幾何学者たちがふつうに行っていることを、トポロジー(位相幾何学)との関係を含め、非可換な解析学の中でもできるようにする枠組みである (ATIYAH, Michel [2001], “Mathematics in the 20th Century”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 108, p. 666 ;邦訳「20 世紀における数学」、『数学とは何か—アティヤの科学・数学論集—』、志賀浩二編訳、朝倉書店、pp. 127)。

Atiyah は、このような「統一化」を促す数学理論として、homology や cohomology、K 理論、リー群、有限群の理論を挙げている。homology と cohomology の理論は、「特殊化・専門化」の時代の 20 世紀前半に位相幾何学において誕生し、抽象化され、「特殊化・専門化」の時代から「統一化」の時代へと移行する 20 世紀半ばから驚異的な仕方、様々な形の homology や cohomology を生み出しながら、代数幾何学や群論、数論など多くの数学の分野においてその適用の場を広げていった。Connes の非可換微分幾何学は、作用素環論を出発点に K 理論の双対とも言える K-homology や Cyclic cohomology といった homology と cohomology を駆使した理論である。そして、Connes は、その非可換幾何学を用いて、素粒子理論の標準理論の再構成を試みている。そこでは、ヒッグス場(二重項の複素スカラー場)の対称性の破れにより、弱い相互作用のゲージボゾンやフェルミオンに質量を与える機構(Weinberg-Salam 理論や湯川カプリング)や、カビボ・小林・益川行列も視野に入れられている (CONNES, Alain [1994], *Noncommutative Geometry*, New York/Tokyo, Academic Press)。さらには、ニュートリノ振動や、重力をミニマルに素粒子理論の標準模型に組み入れることも試みる (CONNES, Alain and MARCOLLI, Matilde [2007], *Noncommutative Geometry, Quantum Field Theory and Motives*, AMS)。

本発表では、Connes [1994]の第 6 章 The metric aspect of noncommutative geometry の一部を簡単にコメントする。Connes は、 C^* 環に稠密に入った代数に対する K 理論、そして cyclic cohomology を考えることで、非可換微分幾何学を構成し、それに対する非可換な Atiyah-Singer の指数定理などを考える。それらは、位相幾何学的な K 理論や de Rham cohomology の拡張となっている。なぜ、それが非可換幾何学なのかと言うと、可換 C^* 環は位相空間に、可換 C^* 環上の有限生成な射影加群は位相空間上のベクトル束に対応付けられるからであり、その C^* 環を非可換に拡張すると意味においてである。その意味で、非可換 C^* 環に稠密に入った環に対応させられる実際の幾何学的空間があるわけではないので、それはある意味、ヴァーチャルな幾何学と言ってもよい。その非可換可微分多様体に対して、距離は二つの状態の与える量の差で、無限小

Operator product expansion in two-dimension conformal field theory

 森脇湧登



Conformal field theory can be defined using the associativity and the commutativity of the product of quantum fields (operator product expansion). An important difference between conformal field theory and classical commutative associative algebra is "the divergence" arising from the product of quantum fields, a difficulty that appears in quantum field theory in general. In this talk we will explain that in the two-dimensional case this algebra can be controlled by the representation category of a vertex operator algebra and that the convergence of quantum fields is described by the operad structure of the configuration space.

Nambu–Goldstone modes in a lattice Nambu–Jona-Lasinio model with multi flavor symmetries

 後藤ゆきみ



In this talk, we study a lattice Nambu–Jona-Lasinio model with SU(2) and SU(3) flavor symmetries of staggered fermions in the Kogut–Susskind Hamiltonian formalism. This type of four-fermion interactions has been widely used for describing low-energy behaviors of strongly interacting quarks as an effective model. In the strong coupling regime for the interactions, we prove the following:

- (i) For the spatial dimension $d \geq 5$, the SU(3) model shows a long-range order at sufficiently low temperatures.
- (ii) In the case of the SU(2) symmetry, there appears a long-range order in the spatial dimension $d \geq 3$ at sufficiently low temperatures.
- (iii) These results hold in the ground states as well.
- (iv) In general, if a long-range order emerges in this type of models, then there exists a gapless excitation above an infinite-volume ground state. This is nothing but the Nambu–Goldstone mode associated with the spontaneous breakdown of the global rotational symmetry of flavors.
- (v) It is also established that the number of Nambu–Goldstone modes is equal to the number of broken symmetry generators.

Inverse N -body scattering with the time-dependent Hartree-Fock approximation

渡邊道之 (岡山理科大学)*

同種粒子多体系を考える。外力ポテンシャルを V_{ext} とする。相互作用ポテンシャルは 2 体力 V_{int} からなるものとする。典型的な例は、原子核に陽子数 Z を持つ原子中の N 個の電子である。この場合、外力ポテンシャルは原子核と電子の引力であり、相互作用ポテンシャルは電子と電子の斥力である。多体系の逆散乱問題では、粒子の散乱状態から相互作用ポテンシャル V_{int} と外力ポテンシャル V_{ext} を決定できるか、という問題である。この問題に対する数学的アプローチとして、多体シュレーディンガー方程式に対する逆散乱問題の定式化が、定常的方法や時間に依存する方法を用いてなされており、外力ポテンシャルを含まない場合 (Enss and Weder [1]; Novikov [2]; Wang [3, 4]; Vasy [5]; Uhlmann and Vasy [6, 7, 8]) や、外力ポテンシャルとして、電場が与えられている状況下において (Valencia and Weder [9]; Adachi, Fujiwara and Ishida [10]; Adachi et al. [11]; Adachi and Maehara [12]; Ishida [13]), 相互作用ポテンシャルを推定する研究が行われてきた。


上記の研究とは異なる数理物理的なアプローチに、ハートリー・フォック近似とベイス統計的方法を用いて多体系の相互作用ポテンシャルを散乱データから決定する逆問題研究もある (Lemm and Uhlig [14])。この論文では、定常ハートリー・フォック方程式の解で定まるデータから、相互作用ポテンシャルを再構成する数値計算可能な方法を与えている。ハートリー・フォック近似は、多体系の波動関数を近似的に求めるだけでなく、相互作用ポテンシャルを再構成する計算にも有効に使われている。

近年の核分光実験の発展により、時間依存のハートリー・フォック理論が 1 つの有望な理論と考えられており (例えば、市村・坂田・松柳 [15, 6-4 節] を参照), 時間依存ハートリー・フォック方程式の数値計算の研究も進んでいる (Lubich[16])。

このような研究背景のもと、これまで数学的なアプローチによる研究結果の少なかった、外力ポテンシャルと相互作用ポテンシャルの両方を推定する逆散乱問題を、多体系の近似法として注目されている時間依存ハートリー・フォック方程式に対して数学解析を試みた。本講演では、時間依存ハートリー・フォック方程式の散乱作用素を与えられたデータとして、散乱作用素から相互作用ポテンシャルと外力ポテンシャルの両方を決定する逆問題について考える。散乱作用素の高エネルギー極限が、外力ポテンシャルと相互作用ポテンシャルの両方を一意的決定でき、それぞれの再構成公式の導出を可能とすることを紹介する (Watanabe[17])。

* 〒700-005 岡山県岡山市北区理大町 1-1 岡山理科大学

Random models on regularity-integrability structures

 星野壮登



In the study of singular SPDEs, it has been a challenging problem to obtain a simple proof of a general probabilistic convergence result (BPHZ theorem). Differently from Chandra and Hairer's Feynman diagram approach, Linares, Otto, Tempelmayr, and Tsatsoulis recently proposed an inductive proof based on the spectral gap inequality by using their multiindex language. Inspired by their approach, Hairer and Steele also obtained an inductive proof by using the regularity structure language. In this talk, we introduce an extension of the regularity structure including integrability exponents and provide a simpler proof of BPHZ theorem. This talk is based on a joint work with Ismael Bailleul (Univ Brest).

斜面を流下する懸濁液の隆起現象に対する数学的考察

松江 要*, 友枝 恭子†

懸濁液実験の一つとして Zhou 等 [2] による結果がある：傾斜角 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) を持つアクリル製の斜面に分散が均一のガラスビーズ (直径 $250 - 425 \mu\text{m}$) とシリコンオイルの懸濁液を流し、流れる懸濁液の水面形 (概形) を上から観察する。このとき観測される懸濁液の水面形は 流下する斜面の角度と粒子の体積分率によって、次の 3 パターンに変化する。1) 傾斜角が低く ($0^\circ < \alpha < 35^\circ$) かつ 体積分率も低い ($0 < \phi < 0.35$) 場合、ガラスビーズ (粒子) は沈降し、懸濁液の底部には粒子層、上部には流体層 (ガラスビーズを含まないクリアな状態のシリコンオイルが流れる層) が生成される (図 (a) settled)。2) 傾斜角が高く ($\alpha > 40^\circ$) かつ 体積分率も高い ($\phi > 0.40$) 場合、流下する懸濁液の先端には粒子が集まり、懸濁液の縁部分が粒子塊によって隆起する (図 (c) ridged)。3) 1) と 2) 以外 ($35^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$ または $0.35 \leq \phi \leq 0.40$) の場合、懸濁液は ガラスビーズとシリコンオイルの混合状態を保ちながら流下する (図 (b) well-mixed)。Zhou 等 [2] の結果によると、パターン 2) に現れる隆起現象は 2 つの衝撃波 (1-衝撃波と 2-衝撃波) によるものとされており、提唱される数理モデルは以下の保存則系である [1, 2] :

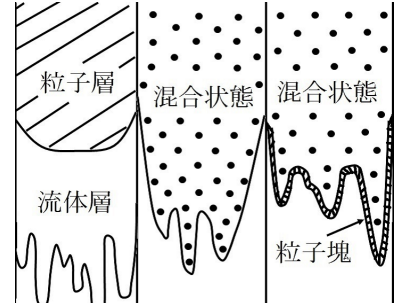


Figure 1: 左から (a) settled, (b) well-mixed, (c) ridged.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (h^3 f(\phi)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi h) + \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \phi f(\phi) + h g(\phi)) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $h(t, x) (> 0)$ は液膜の厚さ $\phi(t, x) \in (0, 1)$ は粒子の体積分率を表す。また、

$$f(\phi) = \frac{\rho(\phi)}{\mu(\phi)}, \quad g(\phi) = v_s \phi (1 - \phi) F(\phi) W(h)$$

であり、 $\rho(\phi)$ と $\mu(\phi)$ はそれぞれ

$$\rho(\phi) = 1 + \frac{(\rho_p - \rho_f)}{\rho_f} \phi, \quad \mu(\phi) = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{max}}\right)^{-2}, \quad F(\phi) = (1 - \phi)^{5.1}$$

である。また、 $W(h)$ は

$$W(h) = \frac{\frac{1}{18} (h/a)^2}{\sqrt{1 + [\frac{1}{18} (h/a)^2]^2}},$$

ただし、 a は粒子の中心から壁面までの距離を表す。本講演では、保存則系 (1) のリーマン問題について考察し、リーマン問題の弱解を構成する 2 つの Lax 衝撃波 (1-衝撃波と 2-衝撃波) の導出について紹介する。そして、粒子の体積分率・粒径の数値変化により生じる 2 つの Lax 衝撃波の挙動変化を調べることにより、粒子の体積分率・粒径と隆起現象の関係性について探る。

References

- [1] B. Cook, A. Bertozzi, A. Hosoi, Shock solutions for particle-laden thin films, *SIAM J. Appl. Math.* **68** 760–783, (2008).
- [2] J. Zhou, B. Dupuy, A. L. Bertozzi, A. E. Hosoi, *Theory for shock dynamics in particle-laden thin films*, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 117803 (2005).

*九州大学マス・フォア・インダストリ研究所/カーボンニュートラル・エネルギー国際研究所, E-mail: kmatsue@imi.kyushu-u.ac.jp

†摂南大学理工学部基礎理工学機構, E-mail: tomoeda@mpg.setsunan.ac.jp

On relations between L -functions and random matrix theory

 杉山真吾



"At the end of the 20th century, relations between number theory and physics was considered by Keating-Snaith and Katz-Sarnak, respectively. Keating and Snaith conjectured a similarity between moments of L -functions and those of characteristic polynomials of random matrices. Later, Katz and Sarnak suggested that zeros of L -functions should distribute like eigenvalues of random matrices. In this talk, we focus on zeros of L -functions and suggest the weighted density conjecture of zeros for families of L -functions. Moreover we show two pieces of evidence supporting this conjecture. The first evidence is on symmetric power L -functions attached to modular forms, and the second one is on Dirichlet L -functions. The second result is a joint work with Ade Irma Suriajaya (Kyushu University)."


量子インストルメント理論の展開: 量子測定から量子認知へ

 小澤正直



量子測定理論の数学的基礎理論として生まれ、最近では認知心理学にも応用される量子インストルメント理論の展開を俯瞰する。量子測定理論は、von Neumann (1932) によって「反復可能性仮説」にもとづいて導入された。Heisenberg (1927) は、それを誤差のある測定に拡張した「近似的反復可能性仮説」のもとで同時測定の誤差に関する不確定性関係を導いた。Lüders (1951) は「反復可能性仮説」を強めた「射影仮説」を提案して、離散的オブザーブルの測定に伴う「波束の収縮」による状態変化を一意的に定めた。Nakamura-Umegaki (1962) は、「射影仮説」を連続的オブザーバブルの測定に拡張するために、「波束の収縮」による状態変化を「Umegaki の条件付き期待値」で記述するよう提唱したが、Arveson (1967) によってその存在は否定された。1970年にDavies-Lewisは「反復可能性仮説」を廃棄することを提案し、一般の測定は、状態空間上のアフィン変換値測度である「インストルメント」によって記述されると提唱した。Yuen (1986) は、物理的に実現可能な量子測定を数学的に特徴付ける問題を提案し、「インストルメント」は一般的すぎると予言した。Ozawa (1984) は、「完全正值(量子)インストルメント」と「物理的に実現可能な一般の測定過程」を数学的に定義して、それらの同等性を証明して、Yuenの問題を解決した。また、Ozawa (2003)は、このような量子測定理論の一般的な枠組みにおける普遍的原理としてHeisenbergの不確定性原理を再定式化し、同時測定の誤差および誤差と擾乱に関する不確定性関係を導いた。認知心理学の分野では、世論調査において二つの質問の順序を変えると、その回答の統計が変化する「質問順序効果」が知られていたが、Wang-Busemeyer (2013) は「射影測定」のモデルで質問順序効果を再現するモデルを構成して注目を集めた。Khrennikov et al. (2014)は、世論調査において同じ質問を繰り返すと同じ回答をするという「回答再現効果」が成り立つべきだが、Wang-Busemeyerのモデルは、「回答再現効果」を満たさないことを指摘し、量子モデルで、「質問順序効果」と「回答再現効果」を両立させるモデルが可能かという問題を提起した。Ozawa-Khrennikov (2019) は「量子インストルメント」を用いたモデルで、両者を両立させるモデルが可能であることを示した。

An algebraic and categorical approach to local quantum physics

 岡村和弥



In this talk, we present an algebraic and categorical approach to local quantum physics. We revisit C^* -algebraic quantum theory since Segal and Haag-Kastler and formulate measurement theory in C^* -algebraic quantum theory. For this purpose, we use central subspace and $C^*-\mathbb{L}^1$ space. The former, introduced in a previous study by the author, is an invariant closed subspace of the dual space of a C^* -algebra. We analyze several categories of central subspaces in order to compare central subspaces in different ways. This analysis is a variant of the investigations by Fell, Haag-Kastler, and others. A $C^*-\mathbb{L}^1$ space is a pair of a C^* -algebra and a central subspace of its dual space. Next, we define completely positive (CP) instrument, a central concept in quantum measurement theory. A CP instrument is a measure that takes values in CP maps between two $C^*-\mathbb{L}^1$ spaces and is used to describe the dynamical state changes including measuring processes. Based on CP instruments, we develop local measurements in local quantum physics.

ミクロマクロ双対性とKan拡張

 小嶋泉



ミクロマクロ双対性を形成するミクロ dynamics とミクロ algebra を接合積の形で一体化してミクロマクロ4項関数を3項化すると、圏論での Kan 拡張と関連付けることができるが、ここに現れる自然変換を局所ゲージ変換と解釈する文脈を用意すれば、量子場理論を構成する基本概念を新たな視点から再解釈することができるので、それを吟味したい。