

Connes の非可換微分幾何学による素粒子理論の標準模型の再構成

原田雅樹

A. Connes の非可換幾何学の構想について、幾何学者 M. Atiyah は次のように述べる。

私はここで Connes の非可換微分幾何学について強調しておきたいと思う。Alain Connes は、この壮大と言ってもよい統一理論を掲げている。ここでもまたすべてのことが結びつけられている。この理論は、解析学、代数学、幾何学、トポロジー、物理学、数論を結び付け、これらのすべてが、この理論の中のある部分に貢献している。これは、微分幾何学者たちがふつうに行っていることを、トポロジー(位相幾何学)との関係を含め、非可換な解析学の中でもできるようにする枠組みである (ATIYAH, Michel [2001], “Mathematics in the 20th Century”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 108, p. 666; 邦訳「20 世紀における数学」、『数学とは何か—アティヤの科学・数学論集—』、志賀浩二編訳、朝倉書店、pp. 127)。

Atiyah は、このような「統一化」を促す数学理論として、homology や cohomology、K 理論、リー群、有限群の理論を挙げている。homology と cohomology の理論は、「特殊化・専門化」の時代の 20 世紀前半に位相幾何学において誕生し、抽象化され、「特殊化・専門化」の時代から「統一化」の時代へと移行する 20 世紀半ばから驚異的な仕方、様々な形の homology や cohomology を生み出しながら、代数幾何学や群論、数論など多くの数学の分野においてその適用の場を広げていった。Connes の非可換微分幾何学は、作用素環論を出発点に K 理論の双対とも言える K-homology や Cyclic cohomology といった homology と cohomology を駆使した理論である。そして、Connes は、その非可換幾何学を用いて、素粒子理論の標準理論の再構成を試みている。そこでは、ヒッグス場(二重項の複素スカラー場)の対称性の破れにより、弱い相互作用のゲージボゾンやフェルミオンに質量を与える機構(Weinberg-Salam 理論や湯川カプリング)や、カビボ・小林・益川行列も視野に入れられている (CONNES, Alain [1994], *Noncommutative Geometry*, New York/Tokyo, Academic Press)。さらには、ニュートリノ振動や、重力をミニマルに素粒子理論の標準模型に組み入れることも試みる (CONNES, Alain and MARCOLLI, Matilde [2007], *Noncommutative Geometry, Quantum Field Theory and Motives*, AMS)。

本発表では、Connes [1994] の第 6 章 The metric aspect of noncommutative geometry の一部を簡単にコメントする。Connes は、 C^* 環に稠密に入った代数に対する K 理論、そして cyclic cohomology を考えることで、非可換微分幾何学を構成し、それに対する非可換な Atiyah-Singer の指数定理などを考える。それらは、位相幾何学的な K 理論や de Rham cohomology の拡張となっている。なぜ、それが非可換幾何学なのかと言うと、可換 C^* 環は位相空間に、可換 C^* 環上の有限生成な射影加群は位相空間上のベクトル束に対応付けられるからであり、その C^* 環を非可換に拡張すると意味においてである。その意味で、非可換 C^* 環に稠密に入った環に対応させられる実際の幾何学的空間があるわけではないので、それはある意味、ヴァーチャルな幾何学と言ってもよい。その非可換可微分多様体に対して、距離は二つの状態の与える量の差で、無限小

距離は一般化されたディラック作用素の逆、すなわちプロパゲイターによって入れられる。すなわち計量をア・プリオリに入れるのではなく、ダイナミカルな Dirac 作用素を通して入れるというのが Connes の方針である。

そのような計量の入った空間によって、Connes は素粒子理論の標準模型を再構成する。そこで考える空間は、4次元のユークリッド的な連続空間とカイラリティに対応する離散空間の直積である。そして、離散空間に対する Dirac 作用素として質量行列を対角に入れた行列を考える。離散空間での「微分」はこの Dirac 作用素との交換関係によって考える。

素粒子理論の標準模型の非可換幾何学による再構成はどのような意味があるのだろうか。標準模型について言えば、物理学者は Feynman diagramm を用いて実践的に計算する。その時には、経路積分が摂動展開されているので、それぞれの項を、ある意味で素粒子の粒子像をもって計算している。実験結果と計算結果を照合させる時にはそれで何の差支えもない。しかし、量子もつれが明らかにしたように、通常空間の中に古典論的な実在性を持つ粒子が運動している描像は通用しないことが明確になった。そのような状況の中で、非可換幾何学による素粒子理論の再構成は、ダイナミカルな状態の与える量の差によって「距離」を入れた量子化された場の意味を考えることで、新たな物質像の理解を与えてくれる可能性を秘めているように思われる。