

Abstract

Rigged Hilbert 空間 (RHS) は Dirac の bra-ket 形式を数学的に定式化する際の基礎空間として知られている [1]. この空間は次の 3 つの線形位相空間の組で構成されている [2].

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi' \quad (1)$$

ここで, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ が Hilbert 空間に対応しており, Φ は \mathcal{H} の稠密な部分空間で (Φ, τ_{Φ}) が核空間となるような位相 τ_{Φ} を備えている. また, Φ' はこの核空間上の線形汎関数の集合 (dual space) である. RHS は, I. M. Gelfand およびその協力者とともに, Hilbert 空間と超関数とを結びつけるために考案された空間であり (そのため Gelfand の三つ組みとも呼ばれる) 通常の Hermite 量子系に対して適用され発展してきた. 一方, この空間を用いた現代量子論への適用可能性については, まだ十分な議論がなされていない. このような状況において, 本研究の目的は RHS が PT 対称量子系 [3] をはじめとする非 Hermite 量子系に対する数学的基礎空間となり得るかを調べることにある.

本発表では positive-definite metric を有する非 Hermite 系に着目し, RHS による bra-ket 形式の数学的定式化について議論する [4]. まず, RHS に基づいた核スペクトル定理について概説し, それが通常の Hermite 量子系における bra-ket 形式の定式化に応用できることを述べる. 次に RHS を非 Hermite 系へ応用するために, positive-definite metric を用いて RHS を構成し直す. その後, 得られた RHS 上で quasi-Hermite 作用素のスペクトル分解を行い, このスペクトル分解に基づいて bra-ket 形式を定式化していく. 最後に, 具体的な物理系として Swanson モデル [5] を取り上げて, 得られた結果を応用する.

References

- [1] J-P. Antoine, J. Math. Phys. **10**, 53 (1969); A. Bohm, *The Rigged Hilbert Space and Quantum Mechanics, Lecture Notes in Physics Vol. 78* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg; New York, 1978); R. de la Madrid, Eur. J. Phys. **26**, 287 (2005).
- [2] I. M. Gelfand and N. Y. Vilenkin, *Generalized Functions vol IV* (New York Academic 1964); K. Maurin, *Generalized Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups* (Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1968).
- [3] C. M. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998); C. M. Bender, Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
- [4] S. Ohmori and J. Takahashi, J. Math. Phys. **63**, 123503 (2022).
- [5] M. S. Swanson, J. Math. Phys. **45**, 585 (2004).