

# 斜面を流下する懸濁液の隆起現象に対する数学的考察

松江 要\*, 友枝 恭子†

懸濁液実験の一つとして Zhou 等 [2] による結果がある：傾斜角  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ) を持つアクリル製の斜面に分散が均一のガラスビーズ (直径  $250 - 425 \mu\text{m}$ ) とシリコンオイルの懸濁液を流し、流れる懸濁液の水面形 (概形) を上から観察する. このとき観測される懸濁液の水面形は 流下する斜面の角度と粒子の体積分率によって、次の 3 パターンに変化する. 1) 傾斜角が低く ( $0^\circ < \alpha < 35^\circ$ ) かつ 体積分率も低い ( $0 < \phi < 0.35$ ) 場合、ガラスビーズ (粒子) は沈降し、懸濁液の底部には粒子層、上部には流体層 (ガラスビーズを含まないクリアな状態のシリコンオイルが流れる層) が生成される (図 (a) settled). 2) 傾斜角が高く ( $\alpha > 40^\circ$ ) かつ 体積分率も高い ( $\phi > 0.40$ ) 場合、流下する懸濁液の先端には粒子が集まり、懸濁液の縁部分が粒子塊によって隆起する (図 (c) ridged). 3) 1) と 2) 以外 ( $35^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$  または  $0.35 \leq \phi \leq 0.40$ ) の場合、懸濁液は ガラスビーズとシリコンオイルの混合状態を保ちながら流下する (図 (b) well-mixed). Zhou 等 [2] の結果によると、パターン 2) に現れる隆起現象は 2 つの衝撃波 (1-衝撃波と 2-衝撃波) によるものとされており、提唱される数理モデルは以下の保存則系である [1, 2] :

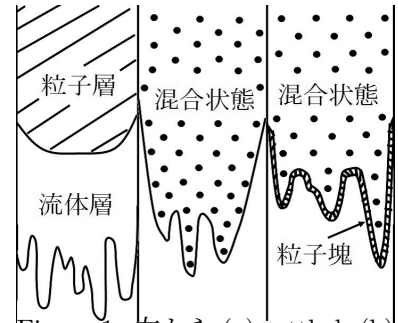


Figure 1: 左から (a) settled, (b) well-mixed, (c) ridged.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (h^3 f(\phi)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi h) + \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \phi f(\phi) + hg(\phi)) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $h(t, x) (> 0)$  は液膜の厚さ  $\phi(t, x) \in (0, 1)$  は粒子の体積分率を表す. また、

$$f(\phi) = \frac{\rho(\phi)}{\mu(\phi)}, \quad g(\phi) = v_s \phi (1 - \phi) F(\phi) W(h)$$

であり、 $\rho(\phi)$  と  $\mu(\phi)$  はそれぞれ

$$\rho(\phi) = 1 + \frac{(\rho_p - \rho_f)}{\rho_f} \phi, \quad \mu(\phi) = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{max}}\right)^{-2}, \quad F(\phi) = (1 - \phi)^{5.1}$$

である. また、 $W(h)$  は

$$W(h) = \frac{\frac{1}{18}(h/a)^2}{\sqrt{1 + [\frac{1}{18}(h/a)^2]^2}}$$

ただし、 $a$  は粒子の中心から壁面までの距離を表す. 本講演では、保存則系 (1) のリーマン問題について考察し、リーマン問題の弱解を構成する 2 つの Lax 衝撃波 (1-衝撃波と 2-衝撃波) の導出について紹介する. そして、粒子の体積分率・粒径の数値変化により生じる 2 つの Lax 衝撃波の挙動変化を調べることで、粒子の体積分率・粒径と隆起現象の関係性について探る.

## References

- [1] B. Cook, A. Bertozzi, A. Hosoi, Shock solutions for particle-laden thin films, SIAM J. Appl. Math. **68** 760–783, (2008).
- [2] J. Zhou, B. Dupuy, A. L. Bertozzi, A. E. Hosoi, *Theory for shock dynamics in particle-laden thin films*, Phys. Rev. Lett. **94**, 117803 (2005).

\*九州大学マス・フォア・インダストリ研究所/カーボンニュートラル・エネルギー国際研究所, E-mail: kmatsue@imi.kyushu-u.ac.jp

†摂南大学理工学部基礎理工学機構, E-mail: tomoeda@mpg.setsunan.ac.jp