Symmetry of Auslander Condition

「Symmetry of k-Gorenstein Ring」といってもよい。このことは Fossum, Griffith, Reiten の Lecture Note(vol. 456) 3.7 に categorical な証明が載っているが，分かり難い。そこで module theoretic version の証明を詳しく与えた。尚，この一文の作成は信州大 (総合) 工学系研究科宮原，亀山両君の協力があって可能となった。

O. Iyama, Symmetry and duality on n-Gorenstein rings, J. Alg. 269(2003) 528-535, に興味深い拡張・発展がある。

定理 1. Λ をネーター環，$k \geq 1$ とするとき次は同値。

(1) 任意の有限生成左 Λ-加群 A，$1 \leq i \leq k$ をみたす任意の整数 i，及び右 Λ-加群 $\mathrm{Ext}_\Lambda^i(A, \Lambda)$ の任意の部分加群 B に対し次が成り立つ：

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^j(B, \Lambda) = 0 \ (1 \leq \forall j \leq i-1)$$

(2) 任意の有限生成右 Λ-加群 A，$1 \leq i \leq k$ をみたす任意の整数 i，及び左 Λ-加群 $\mathrm{Ext}_\Lambda^i(A, \Lambda)$ の任意の部分加群 B に対し次が成り立つ：

$$\mathrm{Ext}_\Lambda^j(B, \Lambda) = 0 \ (1 \leq \forall j \leq i-1)$$

(3) $0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow E_\Lambda^0(\Lambda) \longrightarrow E_\Lambda^1(\Lambda) \longrightarrow \cdots$ を Λ の左 Λ-module としての minimal injective resolution とするとき，$j \leq k-1$ をみたす任意の非負整数 j に対し，$\mathrm{fd}_\Lambda(E_\Lambda^j(\Lambda)) \leq j$ が成り立つ。

(4) $0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow E_\Lambda'^0(\Lambda) \longrightarrow E_\Lambda'^1(\Lambda) \longrightarrow \cdots$ を Λ の右 Λ-加群としての minimal injective resolution とするとき，$j \leq k-1$ をみたす任意の非負整数 j に対し，$\mathrm{fd}_\Lambda(E_\Lambda'^j(\Lambda)) \leq j$ が成り立つ。

注意. この定理の証明をこれから述べていくのであるが，長くなるので大きく二つの部分に分ける。まず (1) と (3) の同値をしめす。(2) と (4) の同値はこの証明とまったく同様に示せるので省略する。次に (1) と (2) の同値を示すのであるがこれはまったく対称の議論をすれば良いので (1) $\Longrightarrow$ (2) を示せば十分である。この２つを証明すれば上の定理の証明は得られることになる。

(1) と (3) の同値について

証明に入る前に次の事実を紹介しておこう。証明は例えばCartan，Eilenberg の Homological Algebra p.120 を参照。

事実 2. 任意の (左)Λ-加群 A と移入右 Λ-加群 E に対し次が成り立つ。

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,\Lambda),I) \cong \mathrm{Tor}^\Lambda_n(I,A) \text{ (for } \forall n)$$

この事実を準備した上で証明に入ることにする。

証明

簡単のため $E^j = E^j_\Lambda(\Lambda)$ とおく.

(3)$\Longrightarrow$ (1)

$i > j$ をみたす任意の j に対して (3) の仮定から $\mathrm{Tor}^\Lambda_i(E^j,A) = 0$ である。したがって事実 2 から

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A,\Lambda),E^j) \cong \mathrm{Tor}^\Lambda_i(E^j,A) = 0$$

このとき任意の $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A,\Lambda)$ の部分加群 B に対して，$\mathrm{Ext}^j_\Lambda(B,\Lambda) = 0$ であることを次のように示す。

$\nu : B \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_\Lambda(A,\Lambda)$ を包含写像とすれば，E^j は移入加群なので，

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\nu,E^j) : \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A,\Lambda),E^j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(B,E^j)$$

は全射である。したがって，$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A,\Lambda),E^j) = 0$ より $\mathrm{Hom}_\Lambda(B,E^j) = 0$ である。また，$\nu_0 : \Lambda \longrightarrow E^0$ を包含写像とすれば，

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,\nu_0) : \mathrm{Hom}_\Lambda(B,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(B,E^0)$$

は単射であるから，$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,\Lambda) = 0$ である。次に $\mathrm{cok}\,\nu_0 = C_1$ とおき，$\nu_1 : C_1 \longrightarrow E^1$ を包含写像とすれば，

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,\nu_1) : \mathrm{Hom}_\Lambda(B,C_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(B,E^1)$$

は単射であるから，$\mathrm{Hom}_\Lambda(B,C_1) = 0$ である。したがって，完全列

$$0 \longrightarrow \Lambda \longrightarrow E^0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow 0$$

から得られる long exact sequence を考えることにより，完全列

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B, C_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, E^0)$$

を得るが，E^0 は移入加群であるから，$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, E^0) = 0$ である。したがって，$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \Lambda) = 0$ である。以下は $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(B, \Lambda) \cong \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, C_1)$ であることと，$\mathrm{cok}\,\nu_1 = C_2$ とおき，完全列

$$0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow E^1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow 0$$

から得られる long exact sequence を考え，同様の議論をくり返せばよい。
(1) $\Longrightarrow$ (3)

$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A, \Lambda) \cong \mathrm{Ext}^k_\Lambda(\Omega^{i-k}A, \Lambda)$ であるから，(1) はより強く，任意の i と任意の $j < \min(i, k)$ に対して成立する。($i > k$ が加わることに注意)
$j < \min(i, k)$ に対し j に関する帰納法により任意の左 Λ-加群 A と任意の $B(\neq 0) \subset \mathrm{Ext}^i_\Lambda(A, \Lambda)$ に対し，

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B, E^j) = 0$$

であることを示す。すると事実 2 より，

$$\mathrm{Tor}^\Lambda_i(E^j, A) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A, \Lambda), E^j) = 0$$

であるから (3) が成立する。
$j = 0$ のとき $\mathrm{Hom}_\Lambda(B, E^0) \neq 0$ と仮定すると，$f : B \longrightarrow E^0$ で $f \neq 0$，すなわち $\mathrm{Im}\, f \neq 0$ であるものがとれるが，Λ は E^0 の本質部分加群であるから，$\mathrm{Im}\, f \cap \Lambda \neq 0$ である。そこで，$B' = f^{-1}(\mathrm{Im}\, f \cap \Lambda)$ と置けば $\mathrm{Hom}_\Lambda(B', \Lambda) \neq 0$ であるが，これは (1) の仮定に矛盾する。したがって，$\mathrm{Hom}_\Lambda(B, E^0) = 0$ である。

次に $j > 0$ とする。$\mathrm{Hom}_\Lambda(B, E^j) \neq 0$ とすると，Hom の左完全性から

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A, \Lambda), E^j) \neq 0$$

である。ここで $Z = \mathrm{Coker}(E^{j-2} \longrightarrow E^{j-1})$ とおくと，Z は E^j の本質部分加群であるから，$f(\neq 0) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A, \Lambda), E^j)$ をとれば，$\mathrm{Im}\, f \cap Z \neq 0$ である。したがって，$B' = f^{-1}(\mathrm{Im}\, f \cap Z)$ とおけば，$\mathrm{Hom}_\Lambda(B', Z) \neq 0$ である。ここで，完全列

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(B', E^{j-1}) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B', Z) \to \mathrm{Ext}^j_\Lambda(B', \Lambda) \to 0$$

を考えれば，帰納法の仮定から $\mathrm{Hom}_\Lambda(B', E^{j-1}) = 0$ であり，(1) の仮定から $\mathrm{Ext}^j_\Lambda(B', \Lambda) = 0$ である，よって，$\mathrm{Hom}_\Lambda(B', Z) = 0$ であるが，これは矛盾。したがって，$\mathrm{Hom}_\Lambda(B, E^j) = 0$ である。

$\square$

(1) から (2) の証明について

この証明に入る前に一つの記号と補題を 2 つ準備する。まず，M を Λ-加群とするとき，M の評価写像

$$M \longrightarrow M^{**} \quad (x \longmapsto [f \longrightarrow f(x)])$$

を以後 θ_M と表すことにする。もし，M が射影加群ならば θ_M は同型であることが知られている。また，$f \in X^*, x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}((\theta_X)^* \circ \theta_{X^*})(f)(x) &= (\theta_X)^*(\theta_{X^*}(f))(x) \\ &= (\theta_{X^*}(f) \circ \theta_X)(x) \\ &= \theta_{X^*}(f)(\theta_X(x)) \\ &= \theta_X(x)(f) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

であるから，$(\theta_X)^* \circ \theta_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*}$ である。次に補題を 2 つ準備しよう。

補題 3. k を 1 以上の整数とし，A を有限生成 Λ-加群で以下をみたすものとする：

任意の $0 \leq i \leq k$ および任意の $0 \leq j \leq i-1$ に対して $\mathrm{Ext}^j_\Lambda(\mathrm{Ext}^i_\Lambda(A,\Lambda),\Lambda) = 0$

このとき有限生成 Λ-加群 A' で次をみたすものが存在する：
任意の $1 \leq l \leq k$ に対して $\mathrm{Ext}^l_\Lambda(A',\Lambda) = 0$, かつ任意の $t > k$ に対して $\mathrm{Ext}^t_\Lambda(A',\Lambda) \cong \mathrm{Ext}^t_\Lambda(A,\Lambda)(t > k)$

証明

k に関する帰納法により示す。$k = 1$ のとき，つまり $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda),\Lambda) = 0$ とする。

$$Q_1 \xrightarrow{\alpha} Q_0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda) \longrightarrow 0$$

を $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda)$ の射影分解の一部とすると，仮定から，α^* は単射だから，$\mathrm{Coker}\,\alpha^*$ を A_1 とおけば，完全列

$$0 \longrightarrow Q_0^* \longrightarrow Q_1^* \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0$$

が得られる。さらに，A への射影加群 P_0 からの全射をとり，完全列

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

を考えると，Q_0, Q_1 が射影加群であることから，次を可換にするような ϕ_0, ϕ_1 が存在する：

$$\begin{array}{ccccccc} Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle \phi_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle \phi_0}\big\downarrow & & \big\| & & \\ P_0^* & \longrightarrow & Y^* & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda) & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad \cdots\cdots(\dagger)$$

したがって，次の可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longleftarrow & A_1 & \longleftarrow & Q_1^* & \longleftarrow & Q_0^* & \longleftarrow & 0 \\ & & & & \big\uparrow{\scriptstyle \phi_1^*} & & \big\uparrow{\scriptstyle \phi_0^*} & & \\ & & & & P_0^{**} & \longleftarrow & Y^{**} & \longleftarrow & 0 \\ & & & & {\scriptstyle \cong}\big\uparrow{\scriptstyle \theta_{P_0}} & & {\scriptstyle \cong}\big\uparrow{\scriptstyle \theta_Y} & & \\ 0 & \longleftarrow & A & \longleftarrow & P_0 & \longleftarrow & Y & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

したがって，$f : A \longrightarrow A_1$ を $\phi_1^* \circ \theta_{P_0}$ から誘導される準同型とし，Λ-dual とれば可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_1,\Lambda) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle \phi_1^{**}\circ\theta_{Q_0}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi_0^{**}\circ\theta_{Q_1}} & & & & \\ P_0^{***} & \longrightarrow & Y^{***} & & & & \\ {\scriptstyle \cong}\big\downarrow{\scriptstyle (\theta_{P_0})^*} & & \big\downarrow{\scriptstyle (\theta_Y)^*} & & & & \\ P_0^* & \longrightarrow & Y^* & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

が得られ，$\tilde{f} : \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_1,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda)$ を f から誘導される準同型とすれば上は可換である。ここで，$(\theta_{P_0})^* \circ \phi_1^{**} = \phi_1$, $(\theta_Y)^* \circ \phi_0^{**} = \phi_0$ である。なぜなら，次の図式

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{\phi_1} & P_0^* \\ {\scriptstyle \theta_{Q_1}}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle (\theta_{P_0})^*} \\ Q_1^{**} & \xrightarrow{\phi_1^{**}} & P_0^{***} \end{array}$$

は $\phi_1 = \mathrm{id}_{P_0^*} \circ \phi_1 = (\theta_{P_0})^* \circ \theta_{P_0^*} \circ \phi_1 = \theta_1^* \circ \phi_1^{**} \circ \theta_{Q_1}$ より可換である。第二式も同様。

よって，次の図式

$$\begin{array}{ccccccc}
Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \\
P_0^* & \longrightarrow & Y^* & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

は可換なので，可換図式 (†) と合わせて $\tilde{f}$ が同型であることがわかる。

次に $C = \mathrm{Coker}\, f$ とし，$P \longrightarrow C$ を射影加群からの全射とすると，P が射影加群であることから，$P \oplus A \xrightarrow{(\pi,f)} A_1 \longrightarrow 0$ が完全列となるような，$\pi : P \longrightarrow A_1$ が存在する。そこで，$\ker(\pi, f) = A_2$ とおき，完全列

$$0 \longrightarrow A_2 \longrightarrow P \oplus A \xrightarrow{(\pi,f)} A_1 \longrightarrow 0$$

から得られる長い完全列

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow A_1^* \longrightarrow P^* \oplus A^* \longrightarrow A_2^* \\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_1,\Lambda) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_2,\Lambda) \\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A_1,\Lambda) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

を考えれば，$\mathrm{pd}_\Lambda A_1 \leq 1$ であることと，$\tilde{f}$ が同型であることより，

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A_2,\Lambda) = 0, \text{ かつ任意の } i > 1 \text{ に対し}, \mathrm{Ext}^i_\Lambda(A,\Lambda) \cong \mathrm{Ext}^i_\Lambda(A_2,\Lambda)$$

である。したがって $A' = A_2$ とおけばよい。

次に $k > 1$ とする。帰納法の仮定から，任意の $1 \leq l \leq k-1$ に対して $\mathrm{Ext}^l_\Lambda(A_0,\Lambda) = 0$ かつ $\mathrm{Ext}^k_\Lambda(A_0,\Lambda) \cong \mathrm{Ext}^k_\Lambda(A,\Lambda)$ となるような A_0 が存在する。そこで，

$$Q_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^k_\Lambda(A,\Lambda) \longrightarrow 0$$

を $\mathrm{Ext}^k_\Lambda(A,\Lambda)$ の射影分解とすると，仮定から，

$$0 \longrightarrow Q_0^* \longrightarrow Q_1^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_k^* \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0$$

は完全列である。ここで A_1 は $\mathrm{Coker}(Q_{k-1}^* \longrightarrow Q_k^*)$ とする。また，

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

を A_0 の射影分解とすれば，$Q_0, Q_1, \cdots Q_k$ が射影的であることから，次の図式

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
Q_k & \longrightarrow & Q_{k-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^k_\Lambda(A,\Lambda) & \longrightarrow & 0 \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \phi_k} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{k-1}} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_0} & & \Big\| & & \\
P_0^* & \longrightarrow & P_1^* & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{k-1}^* & \longrightarrow & Y^* & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^k_\Lambda(A_0,\Lambda) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

を可換にするような，$\phi_0 : Q_0 \longrightarrow Y^*, \phi_j : Q_j \longrightarrow P^*_{k-j}(j = 1, \cdots, k)$ が存在する。この図式の Λ-dual を考えると，

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & \longleftarrow & A_1 & \longleftarrow & Q_k^* & \longleftarrow & Q_{k-1}^* & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & Q_1^* & \longleftarrow & Q_0^* & \longleftarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle \phi_k^*} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \phi_{k-1}^*} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle \phi_1^*} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \phi_0^*} & & \\
0 & \longleftarrow & A_0 & \longleftarrow & P_0 & \longleftarrow & P_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & P_{k-1} & \longleftarrow & Y^{**} & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

を可換にするような $f : A_0 \longrightarrow A_1$ が存在する。さらに上の可換図式の Λ-dual をとると，$k = 1$ の場合と同様に，f は同型写像

$$\tilde{f} : \mathrm{Ext}^k_\Lambda(A_1, \Lambda) \simeq \mathrm{Ext}^k_\Lambda(A_0, \Lambda)$$

を誘導し，次の完全列を得る：

$$0 \longrightarrow A_2 \longrightarrow P_0 \oplus A_0 \xrightarrow{(\pi,f)} A_1 \longrightarrow 0$$

よって，この完全列から得られる長い完全列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^j_\Lambda(A_1,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j_\Lambda(A_0,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^j_\Lambda(A_2,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{j+1}_\Lambda(A_1,\Lambda) \longrightarrow$$
$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{k-1}_\Lambda(A_0,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{k-1}_\Lambda(A_2,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^k_\Lambda(A_1,\Lambda) \xrightarrow{\tilde{f}} \mathrm{Ext}^k_\Lambda(A_0,\Lambda)$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^k_\Lambda(A_2,\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{k+1}_\Lambda(A_1,\Lambda) \longrightarrow \cdots$$

を考えれば，$\mathrm{pd}_\Lambda A_1 \leq k$ より，任意の $j > k$ に対して，$\mathrm{Ext}^j_\Lambda(A_1, \Lambda) = 0$ であるから，$\mathrm{Ext}^j_\Lambda(A_2, \Lambda) \cong \mathrm{Ext}^j_\Lambda(A, \Lambda)$ であり，さらに任意の $1 \leq l \leq k-1$ に対して，$\mathrm{Ext}^l_\Lambda(A_0, \Lambda) = 0$ であったから，$\mathrm{Ext}^l_\Lambda(A_2, \Lambda) = 0$ である。したがって，$A' = A_2$ とすればよい。

□

補題 4. k を1以上の整数，B を有限生成な Λ-加群とし，任意の $0 \leq i \leq k-1$ に対して，$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(B, \Lambda) = 0$，任意の $0 \leq j \leq k$ に対して，$\mathrm{Ext}^j_\Lambda(\mathrm{Ext}^k_\Lambda(B, \Lambda), \Lambda) = 0$ であるとする。このとき，$\mathrm{Ext}^k_\Lambda(B, \Lambda) = 0$ である。

証明

$k=1$ のとき，$f:P\longrightarrow B$ を射影加群 P から B への全射とし，Y を $\ker f$ とすると，$B^*=0$ より，次の完全列を得る：

$$0\longrightarrow P^*\xrightarrow{f^*}Y^*\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B,\Lambda)\longrightarrow 0$$

さらに Λ-dual をとることで，$f^{**}:Y^{**}\longrightarrow P^{**}$ が同型であることがわかるから，$\theta_P^{-1}\circ f^{**}:Y^{**}\longrightarrow P$ は同型である。したがって，

$$(\theta_P^{-1}\circ f^{**})^*=f^{***}\circ(\theta_P^{-1})^*:P^*\longrightarrow Y^{***}$$

は同型となるが，P は射影加群であったから，$(\theta_P^{-1})^*=\theta_{P^*}$ であり，

$$f^{***}\circ\theta_{P^*}=\theta_{Y^*}\circ f^*$$

であるから，次の可換な図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P^* \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, equal] & Y^* \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{Y^*}"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B,\Lambda) \arrow[r] & 0 \\
 & P^* \arrow[r, "\sim"] & Y^{***} & &
\end{tikzcd}$$

が得られる。したがって，θ_{Y^*} は全射であるが，一般論から，θ_{Y^*} は単射であったから θ_{Y^*} は同型であり，f^* は同型である。よって，$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(B,\Lambda)=0$ である。

$k>1$ とする。

$$Q_k\longrightarrow\cdots\longrightarrow Q_1\longrightarrow Q_0\longrightarrow \mathrm{Ext}^k_\Lambda(B,\Lambda)\longrightarrow 0$$

を $\mathrm{Ext}^k_\Lambda(B,\Lambda)$ の射影分解の一部とすれば，仮定から $\mathrm{Coker}(Q_{k-1}^*\to Q_k^*)$ を B_1 とおけば，

$$0\to Q_0^*\to Q_1^*\to\cdots\to Q_k^*\to B_1\to 0$$

は完全列である。また，

$$0\longrightarrow Y\longrightarrow P_{k-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow B\longrightarrow 0$$

を B の射影分解の一部とすると，$Q_1,\cdots,Q_k$ が射影加群であることから，次を可換にするような $\phi_0,\cdots,\phi_k$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
 & Q_k \arrow[r] \arrow[d, "\phi_k"] & \cdots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] & Q_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0"] & \mathrm{Ext}^k_\Lambda(B,\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_0^* \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{k-1}^* \arrow[r] & Y^* \arrow[r] & \mathrm{Ext}^k_\Lambda(B,\Lambda) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

この可換図式の Λ-dual をとると，次の図式

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & B_1^{**} & \longleftarrow & Q_k^* & & & & & & & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \theta_{B_1}} & & \| & & & & & & & & \\
0 & \longleftarrow & B_1 & \longleftarrow & Q_k^* & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & Q_1^* & \longleftarrow & Q_0^* & \longleftarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle f} & & \uparrow{\scriptstyle \phi_k^*} & & & & \uparrow{\scriptstyle \phi_1^*} & & \uparrow{\scriptstyle \phi_0^*} & & \\
0 & \longleftarrow & B & \longleftarrow & P_0 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & P_{k-1} & \longleftarrow & Y & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

を可換にするような $f : B \longrightarrow B_1$ が存在することがわかる。さらにこの可換図式の Λ-dual をとれば $\tilde{f} := \mathrm{Ext}_\Lambda^k(f, \Lambda) : \mathrm{Ext}_\Lambda^k \longrightarrow \mathrm{Ext}_\Lambda^k(B, \Lambda)$ は同型であるから，次の完全列が得られる：

$$0 \longrightarrow B_2 \longrightarrow P \oplus B \xrightarrow{(\pi, f)} B_1 \longrightarrow 0$$

この完全列の Λ-dual をとると，$B^* = 0,\ \mathrm{Ext}_\Lambda^1(B_1, \Lambda) = 0$ より，

$$0 \longrightarrow B_1^* \longrightarrow P^* \longrightarrow B_2^* \longrightarrow 0$$

は完全列である。よって，次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & B & & & & \\
 & & & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & P \oplus B & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & {\scriptstyle \beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{B_1}} & & \\
0 & \longrightarrow & B_2^{**} & \longrightarrow & P & \underset{\gamma}{\longrightarrow} & B_1^{**} & &
\end{array}$$

ここで，α, β はそれぞれ自然な単射，全射とし，$\gamma = \pi^{**} \circ (\theta_P)^{-1}$ とおく。このとき，$f = (\pi, f) \circ \alpha$ であるから，$\theta_{B_1} \circ f = \theta_{B_1} \circ (\pi, f) \circ \alpha = \gamma \circ \beta \circ \alpha = 0$ であるが，次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & B_1^{**} & \longleftarrow & Q_k^* & \longleftarrow & Q_{k-1}^* \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \theta_{B_1}} & & \| & & \| \\
0 & \longleftarrow & B_1 & \longleftarrow & Q_k^* & \longleftarrow & Q_{k-1}^*
\end{array}$$

から，θ_{B_1} は単射であることがわかるから，$f=0$ である。よって $\tilde{f}=0$ であり，$\mathrm{Ext}^k_\Lambda(B,\Lambda)=0$ が得られる。

$\square$

最後に (1) から (2) の証明をする。

証明

$k=1$ のとき
任意の A_Λ と任意の $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda)$ の部分加群 B に対して，完全列

$$0 \longrightarrow \Lambda^n \longrightarrow E_\Lambda \longrightarrow A_\Lambda \longrightarrow 0$$

で

$$E^* \longrightarrow \Lambda^n \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

もまた完全になるものが存在する。これは，B が $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A,\Lambda)$ の部分加群で有限生成であるから，その生成系を $u_i : 0 \longrightarrow \Lambda \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} A \longrightarrow 0\ \ (0 \leq i \leq n)$ とおき，$d : A \longrightarrow A^n$ を $d(x)=(x,x,\cdots,x)$ で定め，次の引き戻し

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A \\ \big\downarrow & & \big\downarrow d \\ \bigoplus_{i=1}^{n} E^k & \xrightarrow{\oplus g_i} & A^n \end{array}$$

を E とすれば，上の完全列が得られることを確認できる。
したがって次の可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B^* \arrow[r] & \Lambda^n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E^{**} & & \\ & 0 \arrow[r] & \Lambda^n \arrow[r, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[u, "f"] & A \arrow[r] & 0 \\ & & & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Tr}E,\,\Lambda) \arrow[u, "g"] & & \\ & & & 0 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

を考えると，$\mathrm{Im}\beta \cap \mathrm{Im}g = 0$ である。なぜなら，$\mathrm{Im}\beta \cap \mathrm{Im}g \neq 0$ ならば，$B' = g^{-1}(\mathrm{Im}\beta \cap \mathrm{Im}g)$ とおくと，g を B' に制限した写像は0ではなく，その像は Λ^n に含まれるから，$\Lambda^n \longrightarrow \Lambda$ を標準的な射影を考えれば，$\mathrm{Hom}_\Lambda(B', \Lambda) \neq 0$ であることがわかるが，B' は $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathrm{Tr}E, \Lambda)$ の部分加群であるから，(1) の仮定より，$\mathrm{Hom}_\Lambda(B', \Lambda) = 0$ でなくてはならないので矛盾である。したがって，$x \in \ker \alpha$ とすると，$f \circ \beta(x) = 0$ であるから，$\beta(x) \in \ker f = \mathrm{Im}\, g$ であり，$\beta(x) \in \mathrm{Im}\,\beta \cap \mathrm{Im}\, g = 0$ である。よって，$\beta(x) = 0$ であるから，$x = 0$ より，α は単射。したがって，$B^* = 0$ である。

次に $k > 1$ とする。$i \leq k-1$ のときは帰納法の仮定からよい。$i = k$ のときも $\mathrm{Ext}^k_\Lambda(A, \Lambda) \cong \mathrm{Ext}^{k-1}_\Lambda(\Omega A, \Lambda)$ であることを用いれば，任意の $\mathrm{Ext}^k_\Lambda(A, \Lambda)$ の部分加群 B は $\mathrm{Ext}^{k-1}_\Lambda(\Omega A, \Lambda)$ の部分加群でもあるから，$1 \leq j \leq k-2$ である j に対しては，$\mathrm{Ext}^j_\Lambda(B, \Lambda) = 0$ である。したがって $\mathrm{Ext}^{k-1}_\Lambda(B, \Lambda) = 0$ を示せばよい。

補題 3 を $k-1$ のときに適用して $\mathrm{Ext}^j_\Lambda(A, \Lambda) = 0 \quad (1 \leq j \leq k-1)$ としてよい。

$$P_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

を A に射影分解の一部とすれば，

$$0 \longrightarrow A^* \longrightarrow P_0^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_k^* \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

は完全列である。ここで，X は $\mathrm{Coker}(P_{k-1}^* \longrightarrow P_k^*)$ である。したがって，次の図式

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & X^* & \longrightarrow & P_k^{**} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_1^{**} & \longrightarrow & P_0^{**} & \longrightarrow & 0(\mathrm{complex}) \\
 & & & & \| & & \| & & \| & & \\
 & & & & P_k & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow (\mathrm{exact})
\end{array}$$

を考れば，任意の $1 \leq j \leq k-1$ に対して，$\mathrm{Ext}^j_\Lambda(X, \Lambda) = 0$ を得る。また，$\mathrm{Ext}^k_\Lambda(A, \Lambda) \subset X$ であるから，任意の $\mathrm{Ext}^k_\Lambda(A, \Lambda) \subset X$ の部分加群 B に対して，完全列

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow X/B \longrightarrow 0$$

から得られる長い完全列を考えることにより，$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^{k-1}_\Lambda(B, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{Ext}^k_\Lambda(X/B, A)$ は完全である。よって (1) の仮定を $A = X/B$ として適用すれば，任意の $0 \leq j \leq k-1$ に対して，$\mathrm{Ext}^j_\Lambda(\mathrm{Ext}^{k-1}_\Lambda(B, \Lambda), \Lambda) = 0$ である。今，$0 \leq j \leq k-2$ に対しては $\mathrm{Ext}^j_\Lambda(B, \Lambda) = 0$ としていたから，補題 4 を $k-1$ の場合に適用して $\mathrm{Ext}^{k-1}_\Lambda(B, \Lambda) = 0$ を得る。