1 多様体の間の写像の例

1. 与えられた滑らかな関数 $\varphi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \dots, n)$ を用いて定義される $\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^n$ の写像:
$$\varphi:\ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m)).$$

2. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への自然な射影:
$$\pi:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \qquad \theta \mapsto [\theta].$$

3. 整数 $n \in \mathbb{Z}$ を用いて定義される $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ から $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への写像:
$$\varphi_n:\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \qquad [\theta] \mapsto [n\theta].$$

4. 実数 $p, q \in \mathbb{R}$ を用いて定義される $\mathbb{R}$ から $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ への写像:
$$\varphi_{p,q}:\ \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \qquad \theta \mapsto ([p\theta], [q\theta]).$$

5. 非負実数 $r \geq 0$ を用いて定義される $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ から $\mathbb{R}^3$ への写像:
$$\varphi_r:\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$\varphi_r([\theta_1], [\theta_2]) = ((r + \cos 2\pi\theta_2)\cos 2\pi\theta_1, (r + \cos 2\pi\theta_2)\sin 2\pi\theta_1, \sin 2\pi\theta_2).$$

6. 自然数 d を用いて定義される $\mathbb{C}P^n$ から $\mathbb{C}P^n$ への写像:
$$\varphi_n:\ \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{C}P^n, \qquad [z_1 : \dots : z_n] \mapsto [z_1^d : \dots : z_n^d].$$

7. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\}$ の間の微分同相写像:
$$\varphi:\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1, \qquad [\theta] \mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta).$$

8. $\mathbb{C}P^1$ と $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の間の微分同相写像:
$$\varphi:\ \mathbb{C}P^1 \longrightarrow S^2, \quad [z : w] \mapsto \left(\frac{2(z\bar{w} + \bar{z}w)}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{2(z\bar{w} - \bar{z}w)}{|z|^2 + |w|^2}, \frac{|z|^2 - |w|^2}{|z|^2 + |w|^2}\right)$$

9. $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ から自分自身への微分同相写像:
$$\varphi:\ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \quad ([\theta_1], [\theta_2]) \mapsto ([a\theta_1 + b\theta_2], [c\theta_1 + d\theta_2]).$$
ただし, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ は $ad - bc = 1$ を満たす.

10. $\mathbb{C}P^1$ から自分自身への微分同相写像:
$$\varphi:\ \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^1, \qquad [z : w] \mapsto [az + bw : cz + dw].$$
ただし, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ は $ad - bc = 1$ を満たす.

2　省略した例

1. 球面 $S^{2n+1} = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} | \ \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1\}$ から $\mathbb{C}P^n$ への写像:

$$\eta : \ S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n, \qquad (z_1, \ldots, z_{n+1}) \mapsto [z_1 : \ldots : z_n].$$

2. $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ から $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ への写像:

$$\mu : \ (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \qquad ([\theta_1], [\theta_2]) \mapsto [\theta_1 + \theta_2].$$

3. $S^3 \times S^3$ から S^3 への写像:

$$\mu : \ S^3 \times S^3 \longrightarrow S^3, \quad ((z_1, z_2), (w_1, w_2)) \mapsto (z_1 w_1 - \bar{z}_2 w_2, z_2 w_1 + \bar{z}_1 w_2).$$