1　例題

例題. $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標を (x,y) とし, 滑らかな写像 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y)=(x^2-y^2,2xy)$ を考える. この写像の $p=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ における微分 $\varphi_*:T_p\mathbb{R}^2\to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ による, 接ベクトル $\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)_p, \big(\frac{\partial}{\partial y}\big)_p\in T_p\mathbb{R}^2$ の像を, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ の基底 $\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)_{\varphi(p)}, \big(\frac{\partial}{\partial y}\big)_{\varphi(p)}$ を用いて表せ.

解答.

$$\begin{aligned}\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p &= 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)}+2b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)},\\ \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p &= -2b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)}+2a\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}.\end{aligned}$$

解き方の例. $\varphi(p)\in\mathbb{R}^2$ の周りで定義された関数を f とすると, $\varphi_*\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)_p f$ は定義より次のように書ける:

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p f=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p \varphi^* f=\frac{\partial(\varphi^* f)}{\partial x}(p).$$

$X(x,y)=x^2-y^2$, $Y(x,y)=2xy$ とおいて $\varphi(x,y)=(X(x,y),Y(x,y))$ と表すと, $(\varphi^*f)(x,y)=f(X(x,y),Y(x,y))$ であり, 次を得る:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi^* f)}{\partial x}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(X(a,b),Y(a,b))\frac{\partial X}{\partial x}(a,b)+\frac{\partial f}{\partial y}(X(a,b),Y(a,b))\frac{\partial Y}{\partial x}(a,b)\\ &= 2a\frac{\partial f}{\partial x}(X(a,b),Y(a,b))+2b\frac{\partial f}{\partial y}(X(a,b),Y(a,b))\\ &= 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)}f+2a\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}f\end{aligned}$$

従って, 次のような $\varphi_*\big(\frac{\partial}{\partial x}\big)_p$ の表示が得られる:

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p = 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)}+2b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}.$$

同様の計算で $\varphi_*\big(\frac{\partial}{\partial y}\big)_p$ の表示も得られる. □

注意.　結局のところ, $\varphi(x,y)=(X(x,y),Y(x,y))$ のヤコビ行列を計算している:

$$(J\varphi)_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y}\\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}.$$

2　演習問題

1. $\mathbb{R}$ の標準的な座標を x とし, 自然数 n に対し, 滑らかな写像 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^n$ を考える. この写像の $p \in \mathbb{R}$ における微分 $\varphi_* : T_p\mathbb{R} \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}$ による, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p \in T_p\mathbb{R}$ の像を, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)}$ を用いて表せ.

2. $\mathbb{R}^2$ の標準的な座標を (x, y) とし, 滑らかな写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ を考える. この写像の $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ における微分 $\varphi_* : T_p\mathbb{R}^2 \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ による, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^2$ の像を, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}$ を用いて表せ.

3. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標をそれぞれ t, (x, y, z) とし, 滑らかな写像 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ を考える. この写像の $p \in \mathbb{R}$ における微分 $\varphi_* : T_p\mathbb{R} \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^3$ による, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p \in T_p\mathbb{R}$ の像を, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi(p)}$ を用いて表せ.

4. $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標をそれぞれ (θ, φ), (x, y, z) とする. 非負実数 $r \geq 0$ に対し, 滑らかな写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を以下のように定める:
$$F(\theta, \varphi) = ((r + \cos\varphi)\cos\theta, (r + \cos\varphi)\sin\theta, \sin\varphi).$$
この写像の $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ における微分 $F_* : T_p\mathbb{R}^2 \to T_{F(p)}\mathbb{R}^3$ による, $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^2$ の像を, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^3$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{F(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{F(p)}, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{F(p)}$ を用いて表せ.

5. $\mathbb{R}^9$ と $\mathbb{R}$ の標準的な座標をそれぞれ $(x_{ij})_{i,j=1,2,3}$, t とし, 滑らかな写像 $F : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}$ を, (x_{ij}) を 3×3 行列とみなしたときの行列式で定める: $F(x_{ij}) = \det(x_{ij})$. この写像の $p = (a_{ij})$ における微分 $F_* : T_p\mathbb{R}^9 \to T_{F(p)}\mathbb{R}$ による, $\left(\frac{\partial}{\partial a_{33}}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^9$ の像を, $T_{F(p)}\mathbb{R}$ の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{F(p)}$ を用いて表せ.

6. $\mathbb{R}$ の標準的な座標を θ とし, $\mathbb{R}$ から $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ への滑らかな写像 $F : \mathbb{R} \to S^2$ を以下のように定める:
$$F(\theta) = (\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta).$$
また, 次のような S^2 の座標近傍 (U, ϕ) を考える:
$$U = \{(x, y, z) \in S^2 | \ x > 0\}, \qquad \phi(x, y, z) = (y, z).$$
このとき, $(\phi \circ F)_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_0 \in T_q\phi(U)$ を, 基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_q \in T_q\phi(U)$ を用いて表せ. ただし, $q = (\phi \circ F)(0) \in \phi(U)$ とおいた.

解答: `http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class/2011/tangent_vectors.pdf`
オフィス: A 棟 5 階 519

3　演習問題の解答

1.
$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p = np^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)}.$$

2.
$$\begin{aligned}\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p &= 3(a^2-b^2)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)} + 6ab\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)},\\ \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p &= -6ab\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)} + 3(a^2-b^2)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}.\end{aligned}$$

3.
$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p = \sin p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)} + \cos p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{\varphi(p)}.$$

4.
$$\begin{aligned}F_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_p &= -(r+\cos b)\sin a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{F(p)} + (r+\cos b)\cos a\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{F(p)},\\ F_*\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)_p &= -\sin b\cos a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{F(p)} - \sin b\sin a\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{F(p)} + \cos a\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_{F(p)}.\end{aligned}$$

5.
$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial a_{33}}\right)_p = (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{F(p)}$$

6.
$$(\phi\circ F)_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_q.$$