1 レポート提出についての注意

- 締め切り: 8 月 6 日 (月)
- 提出場所: 理学部 A 棟 5 階 519
- 様式: A4 レポート用紙 2 枚まで (名前と学籍番号を書き, 綴じる.)

2 レポート問題

(A) 2 次元球面を $S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 |\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$ と書き, 以下のように U_-, U_+, ϕ_-, ϕ_+ を定める:

- U_- と U_+ は次のような S^2 の部分空間である.
$$U_- = \{(X, Y, Z) \in S^2 |\ Z - 1 \neq 0\}, \quad U_+ = \{(X, Y, Z) \in S^2 |\ Z + 1 \neq 0\}.$$
- $\phi_- : U_- \to \mathbb{C}$ は以下のような写像である: 与えられた点 $(X, Y, Z) \in U_-$ に対し, この点と $(0, 0, 1)$ を通る $\mathbb{R}^3$ の中の直線と X-Y 平面との交点を $(x, y, 0)$ とするとき, $\phi_-(X, Y, Z) = x + iy$ と定める.
- $\phi_+ : U_+ \to \mathbb{C}$ は以下のような写像である: 与えられた点 $(X, Y, Z) \in U_+$ に対し, この点と $(0, 0, -1)$ を通る $\mathbb{R}^3$ の中の直線と X-Y 平面との交点を $(x, y, 0)$ とするとき, $\phi_+(X, Y, Z) = x - iy$ と定める.

(A1) $\phi_-(X, Y, Z)$ と $\phi_+(X, Y, Z)$ の具体的な表示を求めよ.

(A2) ϕ_- と ϕ_+ はいずれも逆写像を持つ. $\phi_-^{-1}(z)$ と $\phi_+^{-1}(w)$ の具体的な表示を求めよ.

(B) 1 次元複素射影空間を $\mathbb{C}P^1$ と書き, 次の局所座標近傍 (V_i, ψ_i), $(i = 0, 1)$ を考える:

$$\psi_0 : V_0 = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 |\ z \neq 0\} \to \mathbb{C}, \qquad \psi_0([z : w]) = w/z,$$
$$\psi_1 : V_1 = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 |\ w \neq 0\} \to \mathbb{C}, \qquad \psi_1([z : w]) = z/w.$$

(B1) 写像 $\Phi : S^2 \to \mathbb{C}P^1$ が以下の方法で矛盾なく定義されることを示せ.

$$\Phi(X, Y, Z) = \begin{cases} [\phi_-(X, Y, Z) : 1], & ((X, Y, Z) \in U_-) \\ [1 : \phi_+(X, Y, Z)]. & ((X, Y, Z) \in U_+) \end{cases}$$

(B2) Φ は逆写像 $\Phi^{-1} : \mathbb{C}P^1 \to S^2$ を持つ. $\Phi^{-1}([z : w])$ の具体的表示を求めよ.

(B3) $\Phi^{-1}(V_1) = U_-$ および $\Phi^{-1}(V_0) = U_+$ を示せ.

(B4) 合成写像 $\phi_- \circ \Phi^{-1} \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ と $\phi_+ \circ \Phi^{-1} \circ \psi_0^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の具体的な表示を求めよ.

以上.