

1 例題

例題. \mathbb{R}^2 の標準的な座標を (x, y) とし, 滑らかな写像 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ を考える. この写像の $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ における微分 $\varphi_*: T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ による, 接ベクトル $(\frac{\partial}{\partial x})_p, (\frac{\partial}{\partial y})_p \in T_p\mathbb{R}^2$ の像を, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ の基底 $(\frac{\partial}{\partial x})_{\varphi(p)}, (\frac{\partial}{\partial y})_{\varphi(p)}$ を用いて表せ.

解答.

$$\begin{aligned}\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p &= 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)} + 2b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}, \\ \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p &= -2b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)} + 2a\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}.\end{aligned}$$

解き方の例. $\varphi(p) \in \mathbb{R}^2$ の周りで定義された関数を f とすると, $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p f$ は定義より次のように書ける:

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p \varphi^* f = \frac{\partial(\varphi^* f)}{\partial x}(p).$$

$X(x, y) = x^2 - y^2$, $Y(x, y) = 2xy$ において $\varphi(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ と表すと, $(\varphi^* f)(x, y) = f(X(x, y), Y(x, y))$ であり, 次を得る:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\varphi^* f)}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(X(a, b), Y(a, b)) \frac{\partial X}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(a, b), Y(a, b)) \frac{\partial Y}{\partial x}(a, b) \\ &= 2a \frac{\partial f}{\partial x}(X(a, b), Y(a, b)) + 2b \frac{\partial f}{\partial y}(X(a, b), Y(a, b)) \\ &= 2a \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)} f + 2b \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)} f\end{aligned}$$

従って, 次のような $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$ の表示が得られる:

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p = 2a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\varphi(p)} + 2b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\varphi(p)}.$$

同様の計算で $\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$ の表示も得られる. □

注意. 結局のところ, $\varphi(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$ のヤコビ行列を計算している:

$$(J\varphi)_{(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

2 演習問題

1. \mathbb{R} の標準的な座標を x とし, 自然数 n に対し, 滑らかな写像 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^n$ を考える. この写像の $p \in \mathbb{R}$ における微分 $\varphi_* : T_p\mathbb{R} \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}$ による, $(\frac{\partial}{\partial x})_p \in T_p\mathbb{R}$ の像を, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}$ の基底 $(\frac{\partial}{\partial x})_{\varphi(p)}$ を用いて表せ.
2. \mathbb{R}^2 の標準的な座標を (x, y) とし, 滑らかな写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ を考える. この写像の $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ における微分 $\varphi_* : T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ による, $(\frac{\partial}{\partial x})_p, (\frac{\partial}{\partial y})_p \in T_p\mathbb{R}^2$ の像を, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^2$ の基底 $(\frac{\partial}{\partial x})_{\varphi(p)}, (\frac{\partial}{\partial y})_{\varphi(p)}$ を用いて表せ.
3. \mathbb{R} と \mathbb{R}^3 の標準的な座標をそれぞれ $t, (x, y, z)$ とし, 滑らかな写像 $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$ を考える. この写像の $p \in \mathbb{R}$ における微分 $\varphi_* : T_p\mathbb{R} \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^3$ による, $(\frac{\partial}{\partial t})_p \in T_p\mathbb{R}$ の像を, $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^3$ の基底 $(\frac{\partial}{\partial x})_{\varphi(p)}, (\frac{\partial}{\partial y})_{\varphi(p)}, (\frac{\partial}{\partial z})_{\varphi(p)}$ を用いて表せ.
4. \mathbb{R}^2 と \mathbb{R}^3 の標準的な座標をそれぞれ $(\theta, \varphi), (x, y, z)$ とする. 非負実数 $r \geq 0$ に対し, 滑らかな写像 $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を以下のように定める:

$$F(\theta, \varphi) = ((r + \cos \varphi) \cos \theta, (r + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi).$$

この写像の $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ における微分 $F_* : T_p\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}^3$ による, $(\frac{\partial}{\partial \theta})_p, (\frac{\partial}{\partial \varphi})_p \in T_p\mathbb{R}^2$ の像を, $T_{F(p)}\mathbb{R}^3$ の基底 $(\frac{\partial}{\partial x})_{F(p)}, (\frac{\partial}{\partial y})_{F(p)}, (\frac{\partial}{\partial z})_{F(p)}$ を用いて表せ.

5. \mathbb{R}^9 と \mathbb{R} の標準的な座標をそれぞれ $(x_{ij})_{i,j=1,2,3}, t$ とし, 滑らかな写像 $F : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ を, (x_{ij}) を 3×3 行列とみなしたときの行列式で定める: $F(x_{ij}) = \det(x_{ij})$. この写像の $p = (a_{ij})$ における微分 $F_* : T_p\mathbb{R}^9 \rightarrow T_{F(p)}\mathbb{R}$ による, $(\frac{\partial}{\partial a_{33}})_p \in T_p\mathbb{R}^9$ の像を, $T_{F(p)}\mathbb{R}$ の基底 $(\frac{\partial}{\partial t})_{F(p)}$ を用いて表せ.
6. \mathbb{R} の標準的な座標を θ とし, \mathbb{R} から $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ への滑らかな写像 $F : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ を以下のように定める:

$$F(\theta) = (\cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta).$$

また, 次のような S^2 の座標近傍 (U, ϕ) を考える:

$$U = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\}, \quad \phi(x, y, z) = (y, z).$$

このとき, $(\phi \circ F)_* (\frac{\partial}{\partial \theta})_0 \in T_q\phi(U)$ を, 基底 $(\frac{\partial}{\partial x})_q, (\frac{\partial}{\partial y})_q \in T_q\phi(U)$ を用いて表せ. ただし, $q = (\phi \circ F)(0) \in \phi(U)$ とおいた.

解答: <http://math.shinshu-u.ac.jp/~kgomi/class>

オフィス: A 棟 5 階 519

3 演習問題の解答

1.

$$\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p = np^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{\varphi(p)}.$$

2.

$$\begin{aligned} \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p &= 3(a^2 - b^2) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{\varphi(p)} + 6ab \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{\varphi(p)}, \\ \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p &= -6ab \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{\varphi(p)} + 3(a^2 - b^2) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{\varphi(p)}. \end{aligned}$$

3.

$$\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_p = \sin p \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{\varphi(p)} + \cos p \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{\varphi(p)} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{\varphi(p)}.$$

4.

$$\begin{aligned} F_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_p &= -(r + \cos b) \sin a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{F(p)} + (r + \cos b) \cos a \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{F(p)}, \\ F_* \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)_p &= -\sin b \cos a \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_{F(p)} - \sin b \sin a \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_{F(p)} + \cos a \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)_{F(p)}. \end{aligned}$$

5.

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial a_{33}} \right)_p = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{F(p)}$$

6.

$$(\phi \circ F)_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_q.$$