微分積分学 I 演習問題 1

問題 1. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が極限を持つとする.

(a) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_n + b_n$ で定めるとき, 以下が成り立つことを証明せよ:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(b) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_n b_n$ で定めるとき, 以下が成り立つことを証明せよ:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \big(\lim_{n\to\infty} a_n\big)\big(\lim_{n\to\infty} b_n\big).$$

(c) 任意の自然数 n に対して, $b_n \neq 0$ および $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ であると仮定する. 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_n/b_n$ で定めるとき, 以下が成り立つことを証明せよ:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

問題 2. 数列 $\{a_n\}$ が極限 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ を持つとする. 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

と定めるとき, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ が成り立つことを証明せよ.

問題 1. (解答例)

(a) $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の極限の定義より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N(\epsilon)$ であって, 「全ての $n > N(\epsilon)$ に対して $|\alpha + \beta - a_n - b_n| < \epsilon$ が成り立つ」, という性質を持つものが選べることを示せばよい. そのような $N(\epsilon)$ を選ぶために, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がそれぞれ極限 α と β を持つことの定義を用いる. すなわち, 任意の $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ に対して, ある自然数 $N_1(\epsilon_1)$ と $N_2(\epsilon_2)$ であって次を満たすものが選べる:

$$n > N_1(\epsilon_1) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon_1,$$
$$n > N_2(\epsilon_2) \Rightarrow |b_n - \beta| < \epsilon_2.$$

上の ϵ_1, ϵ_2 は任意なので, 特に $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/2$ と選べば, それに応じて $N_1(\epsilon/2), N_2(\epsilon/2)$ が定まる. これを用いて, $N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon/2), N_2(\epsilon/2)\}$ とおく. すると, $n > N(\epsilon)$ を満たす自然数 n に対して, 次が成り立つ:

$$|\alpha - a_n| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |\beta - b_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

従って, $n > N(\epsilon)$ を満たす自然数 n に対して,

$$|\alpha + \beta - a_n - b_n| \le |\alpha - a_n| + |\beta - b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つ. これで, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 上の $N(\epsilon)$ を選べば, 全て $n > N(\epsilon)$ に対して, $|\alpha + \beta - a_n - b_n| < \epsilon$ が成り立つことが言えたので, $\lim c_n = \alpha + \beta$ である.

(b) $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$ とおく. 数列 $\{c_n\}$ の極限の定義より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N(\epsilon)$ であって, 「全ての $n > N(\epsilon)$ に対して $|\alpha\beta - a_n b_n| < \epsilon$ が成り立つ」, という性質を持つものが選べることを示せばよい. そのような $N(\epsilon)$ を選ぶために, まず $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が極限を持つので, 特に, 有界であることを思い出す. すなわち, ある $M > 0$ が存在して, 全ての自然数 n に対して, $|a_n| < M$ かつ $|b_n| < M$ が成り立つ. 次に, $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$ であることより, 任意の $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ に対して, ある $N_1(\epsilon_1)$ と $N_2(\epsilon_2)$ があって, 次が成り立つ: 任意の $n_1 > N_1(\epsilon_1)$ と $n_2 > N_2(\epsilon_2)$ に対して,

$$|\alpha - a_{n_1}| < \frac{\epsilon_1}{2}, \qquad |\beta - b_{n_2}| < \frac{\epsilon_2}{2}$$

が成り立つ. ここで特に, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/(2M)$ と選ぶことを考え, $N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon/(2M)), N_2(\epsilon/(2M))\}$ とおく. すると, 任意の $n > N(\epsilon)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} |\alpha\beta - a_n b_n| &= |(\alpha - a_n)\beta + a_n(\beta - b_n)| \\ &\le |\alpha - a_n| \cdot |\beta| + |a_n| \cdot |\beta - b_n| \\ &< \frac{\epsilon}{2M}M + M\frac{\epsilon}{2M} = \epsilon. \end{aligned}$$

よって, $\lim c_n = \alpha\beta$ が示された.

(c) $a_n/b_n = (a_n)(1/b_n)$ なので, (b) を踏まえて, $\lim(1/b_n) = \beta$ を示せば十分である. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N(\epsilon)$ であって, 「全ての $n > N(\epsilon)$ に対して $|1/b_n - 1/\beta| < \epsilon$ が成り立つ」, というものが選べることを示せばよい. そのために, 次の二つの主張を用いる. $\beta = \lim b_n$ とおく.

(1) ある自然数 N_1 が存在して, $n > N_1$ ならば $|b_n| > |\beta|/2$ が成り立つ.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_2(\epsilon)$ が存在して, $n > N_2(\epsilon)$ ならば $|\beta - b_n| < |\beta|^2\epsilon/2$ が成り立つ.

主張 (1) と (2) が成り立つとする. このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon)$ を $N(\epsilon) = \max\{N_1, N_2(\epsilon)\}$ とする. $n > N(\epsilon)$ ならば,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{1}{|b_n|}\frac{1}{|\beta|}|\beta - b_n| < \frac{2}{|\beta|}\frac{1}{|\beta|}\frac{|\beta^2|\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つ. すなわち, $\lim(1/b_n) = \beta$ が示せたことになる.

残されたのは, 主張 (1) と (2) を示すことである. そのために, $\lim b_n = \beta$ であること, すなわち, 任意の $\delta > 0$ に対して, ある自然数 $M(\delta)$ が存在して, $n > M(\delta)$ ならば $|\beta - b_n| < \delta$ が成り立つことを用いる. 主張 (1) を示すために, 上で $\delta = |\beta|/2$ とし, $N_1 = M(\delta) = M(|\beta|/2)$ とする. このとき, $n > N_1$ に対して,

$$|\beta - b_n| < \frac{|\beta|}{2}$$

が成り立つ. すると,

$$|\beta| = |(\beta - b_n) + b_n| \le |\beta - b_n| + |b_n| < \frac{|\beta|}{2} + |b_n|$$

より $|\beta|/2 < |b_n|$ が成り立つ. 主張 (2) は, $N_2(\epsilon) = M(|\beta|^2\epsilon/2)$ とすればよい.

問題 2. (解答例)

任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N(\epsilon)$ であって, $n > N(\epsilon)$ ならば $|c_n - \alpha| < \epsilon$ となるものが存在することを示す. これを示すために, 次の三つが成り立つことに注意する.

(a) 与えられた $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N_1(\epsilon)$ が存在して, $n > N_1(\epsilon)$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon/2$ が成り立つ.

(b) ある実数 $M > 0$ が存在して, 全ての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < M$ が成り立つ.

(c) 与えられた $\epsilon > 0$ に対して, $N_2(\epsilon) > 2N_1(\epsilon)M/\epsilon$ を満たす自然数 $N_2(\epsilon)$ が存在する.

(a) は, $\lim a_n = \alpha$ という仮定から従う. (b) は, $\{a_n\}$ が極限を持つ数列なので, 有界であることから従う. (c) は, $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ から従う (アルキメデスの原理). 与えられた $\epsilon > 0$ に対して, 自然数 $N(\epsilon)$ を $N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$ と定める. すると, $n > N(\epsilon) \ge N_1(\epsilon)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
|c_n - \alpha| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i - \alpha}{n}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i - \alpha|}{n} = \sum_{i=1}^{N_1(\epsilon)}\frac{|a_i - \alpha|}{n} + \sum_{i=N_1(\epsilon)+1}^{n}\frac{|a_i - \alpha|}{n} \\
&< \sum_{i=1}^{N_1(\epsilon)}\frac{M}{n} + \sum_{i=N_1(\epsilon)+1}^{n}\frac{\epsilon}{2n} = \frac{N_1(\epsilon)M}{n} + \frac{n - N_1(\epsilon)}{n}\frac{\epsilon}{2} < \frac{N_1(\epsilon)M}{n} + \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

(c) より, $n > N(\epsilon) \ge N_2(\epsilon)$ に対して, $n > \frac{2N_1(\epsilon)M}{\epsilon}$ が成り立つ. すなわち, $\frac{N_1(\epsilon)M}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ が成り立つ. 従って $|c_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ を得る.