微分積分学 I 演習問題 2

問題 1. 以下の数列の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 3^n}{5^n + 3^n}$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 4n + 4}$

(4) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n + 3}{3n^2 + 2n + 1}$

(5) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(6) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})$

(7) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$

(8) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})$

(9) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})$

(10) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n+3} - \sqrt{n^2-2n+2})$

(11) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(12) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$

解答:

(1) -1 (2) 1 (3) 1 (4) $\dfrac{2}{3}$ (5) 0 (6) 0

(7) $\dfrac{3}{2}$ (8) 1 (9) 1 (10) $\dfrac{5}{2}$ (11) $\dfrac{1}{e}$ (12) e^3

(1)
$$\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}\to -1.$$

(2)
$$\frac{5^n-3^n}{5^n+3^n}=\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}\to 1.$$

(3)
$$\frac{n^2+2n+3}{n^2+4n+3}=\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}\to 1.$$

(4)
$$\frac{2n^2+n+3}{3n^2+2n+1}=\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\to \frac{2}{3}.$$

(5)
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0.$$

(6)
$$\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}=\frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}\to 0.$$

(7)
$$\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})=\frac{\sqrt{n}3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}=\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}\to\frac{3}{2}.$$

(8)
$$\sqrt{n}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2})=\frac{\sqrt{n}2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\to 1.$$

(9)
$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}&=\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}\\&=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\to 1.\end{aligned}$$

(10)
$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+3n+3}-\sqrt{n^2-2n+2}&=\frac{5n+1}{\sqrt{n^2+3n+3}+\sqrt{n^2-2n+2}}\\&=\frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}}\to\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

(11) $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$ および, 次の事実を用いる: 数列 $\{a_n\}$ の極限が α であるとき, $a'_n = a_{n-1}$ として作った数列 $\{a'_n\}$ の極限も α である.

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \to \frac{1}{e}.$$

(12) 一般に, 数列 $\{a_n\}_n$ の極限が α であるとき, 数列 $\{a_{m(n)}\}_n$ の極限も α である. ここで, $\{m(n)\}_n$ は単調増加する自然数の数列である. 今, $a_n = (1+3/n)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は, 上に有界な単調増加数列である. (これは, 数列 $\{(1+1/n)^n\}_n$ が上に有界な単調増加数列であることを示す場合と同じように示せる.) 従って, $\{a_n\}$ は極限を持つ. 上で $m(n) = 3n$ という場合を考えると次を得る:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{m(n)}\right)^{m(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3 = e^3.$$