

微分積分学 I 演習問題 4

問題 1. 以下の関数 $y = f(x)$ に対し, その逆関数 $x = f^{-1}(y)$ およびその微分 $f^{-1}(y)'$ を求めよ.

(1) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1,$

(2) $f(x) = x^2 - 2x + 2,$

(3) $f(x) = \frac{x}{x-1}, (x \neq 1)$

(4) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}, (x \neq -1)$

(5) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2}),$

(6) $f(x) = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. (|x| < 1)$

解答:

$$(1) \quad f^{-1}(y) = (y - 1)^3, \quad f^{-1}(y)' = 3(y - 1)^2.$$

$$(2) \quad f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y - 1}, \quad f^{-1}(y)' = \frac{1}{2\sqrt{y - 1}}.$$

$$(3) \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - y}, \quad f^{-1}(y)' = \frac{-1}{(y - 1)^2}.$$

$$(4) \quad f^{-1}(y) = \frac{1 - y}{1 + y}, \quad f^{-1}(y)' = \frac{-2}{(1 + y)^2}.$$

$$(5) \quad f^{-1}(y) = \sinh y, \quad f^{-1}(y)' = \cosh y.$$

$$(6) \quad f^{-1}(y) = \tanh y, \quad f^{-1}(y)' = \frac{1}{\cosh^2 y}.$$