微分積分学 I 演習問題 5

問題 1. 以下の関数 $f(x)$ の高階導関数 $f^{(n)}(x)$ $(n \geq 1)$ を求めよ.

(1) $f(x) = c$ (定数関数)

(2) $f(x) = x^2$

(3) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

(4) $f(x) = e^x$

(5) $f(x) = \log(x+1)$

(6) $f(x) = \cos x$

(7) $f(x) = \cosh x$

(8) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(9) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

(10) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$

問題 2. $f(x) = \tan x$ とし, 関数 $g_m(x)$ と $h_{m+1}(x)$ を以下によって定める:

$$f^{(2m+1)}(x) = \frac{g_m(x)}{\cos^{2m+2} x}, \ (m \geq 0) \qquad f^{(2m)}(x) = \frac{h_m(x)}{\cos^{2m+1} x}. \ (m \geq 1)$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(a) $g_m(x)$ を, $h_m(x)$ と $h'_m(x)$ を用いて表せ. 同様に $h_{m+1}(x)$ を, $g_m(x)$ と $g'_m(x)$ を用いて表せ.

(b) $f^{(n)}(x)$, $(n = 1, 2, \ldots, 5)$ を求めよ.

問題 1 の解答:

(1) $f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 1)$.

(2) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2x & (n=1) \\ 2 & (n=2) \\ 0 & (n \geq 3) \end{cases}$

(3) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} 4x^3+3x^2+2x+1 & (n=1) \\ 12x^2+6x+2 & (n=2) \\ 24x+6 & (n=3) \\ 24 & (n=4) \\ 0 & (n \geq 5) \end{cases}$

(4) $f^{(n)}(x) = e^x$

(5) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(x+1)^{-n}$

(6) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & (n=4m) \\ -\sin x & (n=4m+1) \\ -\cos x & (n=4m+2) \\ \sin x & (n=4m+3) \end{cases}$

(7) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh x & (n=2m) \\ \sinh x & (n=2m+1) \end{cases}$

(8) $f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n-1}n!(x+1)^{-n-1}$

(9) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\dfrac{(2n+1)!}{2n!}(x+1)^{-\frac{2n-1}{2}}$

(10) $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\left\{\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right\} = (-1)^n n!\dfrac{(x+1)^{n+1}-(x-1)^{n+1}}{(x^2-1)^{n+1}}$

問題 2 の解答:

(a) $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$ を計算して次を得る:

$$g_m(x) = h_m'(x)\cos x + (2m+1)h_m(x)\sin x,$$
$$h_{m+1}(x) = g_m'(x)\cos x + (2m+2)g_m(x)\sin x.$$

(b) $g_0(x) = 1$ から始めて h_1, g_1, h_2, g_2 を順番に計算すると次のようになる:

$$h_1(x) = 2\sin x, \qquad g_1(x) = 2 + 4\sin^2 x,$$
$$h_2(x) = 16\sin x + 8\sin^3 x, \qquad g_2(x) = 16 + 88\sin^2 x + 16\sin^4 x.$$

従って $f^{(1)}(x), \ldots, f^{(5)}(x)$ は以下の通りである:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$f^{(2)}(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x},$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{16\sin x + 8\sin^3 x}{\cos^5 x},$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{16 + 88\sin^2 x + 16\sin^4 x}{\cos^6 x}.$$