微分積分学 I 演習問題 6

問題 1. 以下の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対し $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ が成り立つことを示せ.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad f(x,y) = (x^2+y^2)^\alpha. \quad (\alpha > 0)\\
&(2) \quad f(x,y) = x^\alpha y^\beta \quad (\alpha \geq \beta > 0)\\
&(3) \quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.\\
&(4) \quad f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}. \quad (\alpha, \beta > 2)\\
&(5) \quad f(x,y) = \left| xy\frac{|x|-|y|}{x+y} \right|.\\
&(6) \quad f(x,y) = \left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right|.\\
&(7) \quad f(x,y) = \frac{1-\cos xy}{x^2+y^2}.\\
&(8) \quad f(x,y) = \frac{1-\cosh xy}{x^2+y^2}.
\end{aligned}
$$

問題 1. (解答例)

(1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta(\epsilon) > 0$ を選び, $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta(\epsilon)$ ならば $|f(x,y)| < \epsilon$ が成り立つようにできることを示せばよい. 今の場合, $\delta(\epsilon) = \epsilon^{1/2\alpha}$ と選べばよい. 実際, $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon^{1/2\alpha}$ ならば,

$$|f(x,y)| = (x^2+y^2)^\alpha = \sqrt{x^2+y^2}^{2\alpha} < \epsilon$$

が成り立つ.

(2) $x^\alpha y^\beta = x^{\alpha-\beta}(xy)^\beta$ と書けるので, 次の二つを示すことができればよい:

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (xy)^\beta = 0. \quad (\beta > 0)$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^r = \begin{cases} 1, & (r=0) \\ 0. & (r>1) \end{cases}$$

(a) は以下のようにして示せる: 任意の実数 x, y に対して, $|xy| \le \frac{x^2+y^2}{2}$ が成り立つ. 従って, (1) の結果とはさみうちの原理より, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である. (b) は $r=0$ のときは明らかである (極限の定義に従って直接計算できる). $r > 0$ のときは, 次の不等式, (1) の結果とはさみうちの原理を用いればよい: $x^r \le (x^2+y^2)^{\frac{r}{2}}$.

(3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta(\epsilon)\sqrt{2\epsilon}$ とする. もし $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta(\epsilon)$ が成り立てば, $x^2 < x^2+y^2 < 2\epsilon$ より, $1/x^2 > 1/2\epsilon$ が成り立つ. 同様の不等式が x を y に置き換えても成り立つ. それらをあわせて, $1/x^2 + 1/y^2 > 1/\epsilon$ が成り立つ. すると,

$$|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}} < \epsilon$$

が成り立つ. すなわち, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である.

(4) 極限の性質と (2) および (3) を用いる:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^{\alpha-2}y^{\alpha-2}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

(5) 任意の実数 x, y に対して次の不等式が成り立つ:

$$||x|-|y|| \le |x+y| \le |x|+|b|.$$

左側の不等式を用いることで, 次の不等式を得る:

$$\left| xy\frac{|x|-|y|}{x+y} \right| = |xy|\frac{||x|-|y||}{|x|+|y|} \le |xy|.$$

よって, (2) の結果とはさみうちの原理より, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である.

(6) 任意の x, y に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$|x^2-y^2| \le x^2+y^2.$$

従って, 次の不等式を得る:

$$\left| xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| \le |xy|.$$

(2) の結果とはさみうちの原理より, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である.

(7) 任意の z に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$1 - \cos z \leq \frac{z^2}{2}.$$

これを使うと

$$|f(x,y)| = \left| \frac{1-\cos xy}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right|$$

となる. (3) の結果を用いて $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である.

(8) 任意の z に対して, 次の不等式が成り立つ:

$$1 - \cosh z \leq \frac{z^2}{2}.$$

これを使うと

$$|f(x,y)| = \left| \frac{1-\cosh xy}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \right|$$

となる. (3) の結果を用いて $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である.