微分積分学 I 演習問題 8

問題 1. 以下の関数 $f(x, y)$ の停留点を求め, 各停留点が

- 極大点,
- 極小点,
- どちらでもない,

のいずれであるかを答えよ.

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2. \\
&(2) \quad f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2. \\
&(3) \quad f(x, y) = 2x^2 - y^2 + 2y. \\
&(4) \quad f(x, y) = x^3 - 6xy - 3y^2. \\
&(5) \quad f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^2. \\
&(6) \quad f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}. \\
&(7) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-y}. \\
&(8) \quad f(x, y) = ye^{-x^2+y}. \\
&(9) \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 1}. \\
&(10) \quad f(x, y) = \frac{xy - x^2y^2}{x + y}. \quad (x, y > 0)
\end{aligned}
$$

問題 1

(1) $(0,0)$ 極小点.
(2) $(0,0)$ 極小点.
(3) $(0,1)$ どちらでもない.
(4) $(0,0)$ どちらでもない, $(-2,2)$ 極大点.
(5) $(0,0)$ どちらでもない, $(\pm 1,0)$ 極小点.
(6) $(0,0)$ 極大点.
(7) $(0,0)$ 極小点, $(-1,0)$ どちらでもない.
(8) $(0,-1)$ 極小点.
(9) $(0,0)$ 極大点.
(10) $(1/2,1/2)$ 極大点.

問題 1 の解き方の例:

(1) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y)=2x, \qquad f_y(x,y)=2y.$$

方程式 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を解くことで, 停留点は $(x,y)=(0,0)$ であることがわかる. 次に, 各停留点でのヘッセ行列式を求めるために, 2 階偏微分を計算する:

$$f_{xx}=2, \qquad f_{xy}=f_{yx}=0, \qquad f_{yy}=2.$$

停留点 $(0,0)$ において, ヘッセ行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

および $f_{xx}(0,0)>0$ なので, この点は (狭義の) 極小である.

(2) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y)=2(x-y), \qquad f_y(x,y)=-2(x-4y).$$

方程式 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を解くことで, 停留点は $(x,y)=(0,0)$ であることがわかる. 次に, 各停留点でのヘッセ行列式を求めるために, 2 階偏微分を計算する:

$$f_{xx}=2, \qquad f_{xy}=f_{yx}=-2, \qquad f_{yy}=8.$$

停留点 $(0,0)$ において, ヘッセ行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

であり, さらに $f_{xx}(0,0)>0$ なので, この点は (狭義の) 極小である.

(3) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y)=4x, \qquad f_y(x,y)=2(1-y).$$

方程式 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を解くことで, 停留点は $(x,y)=(0,1)$ であることがわかる. 次に, 各停留点でのヘッセ行列式を求めるために, 2 階偏微分を計算する:

$$f_{xx}=4, \qquad f_{xy}=f_{yx}=0, \qquad f_{yy}=-2.$$

停留点 $(0,1)$ において, ヘッセ行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

なので, この点は極小でも極大でもない.

(4) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y) = 3(x^2 - y), \qquad f_y(x,y) = -6(x+y).$$

方程式 $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を解くことで, 停留点は $(x,y) = (0,0), (-2,2)$ であることがわかる. 次に, 各停留点でのヘッセ行列式を求めるために, 2 階偏微分を計算する:

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = f_{yx} = -6, \qquad f_{yy} = -6.$$

停留点 $(0,0)$ において, ヘッセ行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

なのでこの点は極小でも極大でもない. 停留点 $(-2,2)$ において, ヘッセ行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

および $f_{xx} < 0$ なので, この点は (狭義の) 極大である.

(5) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y) = 4x(x^2 - 1), \qquad f_y(x,y) = 2y.$$

方程式 $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を解くことで, 停留点は $(x,y) = (0,0), (\pm 1, 0)$ であることがわかる. 次に, 各停留点でのヘッセ行列式を求めるために, 2 階偏微分を計算する:

$$f_{xx} = 4(3x^2 - 1), \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0, \qquad f_{yy} = 2.$$

よって, 次を得る:

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4(3x^2-1) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8(3x^2 - 1).$$

停留点 $(0,0)$ において, ヘッセ行列式は負なので, この点は極大でも極小でもない. 停留点 $(\pm 1, 0)$ において, ヘッセ行列式は正で, さらに f_{xx} も正であるので, これらの点は (狭義の) 極小である.

(6) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y) = -2xe^{-x^2-y^2}, \qquad f_y(x,y) = -2ye^{-x^2-y^2}.$$

方程式 $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を解くことで, 停留点は $(x,y) = (0,0)$ であることがわかる. 次に, 各停留点でのヘッセ行列式を求めるために, 2 階偏微分を計算する:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2-y^2}, \\ f_{xy} &= f_{yx} = 4xye^{-x^2-y^2}, \\ f_{yy} &= 2(2y^2 - 1)e^{-x^2-y^2}. \end{aligned}$$

$(0,0)$ において, ヘッセ行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

および $f_{xx} < 0$ なので, この点は (狭義の) 極大である.

(7) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y) = (x^2+2x+y^2)e^{x-y}, \qquad f_y(x,y) = (-x^2-y^2+2y)e^{x-y}.$$

方程式 $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を解くと, $(x,y) = (0,0), (-1,0)$ が停留点であることがわかる. 次に, 各停留点でのヘッセ行列式を求めるために, 2 階偏微分を計算する:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (x^2+4x+y^2+2)e^{x-y}, \\ f_{xy} &= f_{yx} = (-x^2+2x-y^2+2y)e^{x-y}, \\ f_{yy} &= (x^2+y^2-4y+2)e^{x-y}. \end{aligned}$$

停留点 $(0,0)$ において, $f_{xx}(0,0) > 0$ およびヘッセ行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

なので, この点は (狭義の) 極小である. 停留点 $(-1,0)$ においては,

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & * \end{vmatrix} = -4 < 0$$

となるので, この点は極大でも極小でもない.

(8) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y) = -2xye^{-x^2+y}, \qquad f_y(x,y) = (1+y)e^{-x^2+y}.$$

方程式 $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を解くと, 停留点は $(0,-1)$ であることがわかる. 次に, 各停留点でのヘッセ行列式を求めるために, 2 階偏微分を計算する:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2y(2x^2-1)e^{-x^2+y}, \\ f_{xy} &= f_{yx} = -2x(1+y)e^{-x^2+y}, \\ f_{yy} &= (y+2)e^{-x^2+y}. \end{aligned}$$

停留点 $(0,-1)$ において, ヘッセ行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{vmatrix} = 2e^{-1} > 0$$

および, $f_{xx} > 0$ なので, この点は (狭義の) 極小である.

(9) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{x^2+2y^2+1}, \qquad f_y(x,y) = \frac{-4y}{x^2+2y^2+1}.$$

方程式 $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ を解くと, 停留点は $(0,0)$ であることがわかる. 次に, 各停留点でのヘッセ行列式を求めるために, 2 階偏微分を計算する:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{2(3x^2-2y^2-1)}{(x^2+2y^2+1)^3}, \\ f_{xy} &= f_{yx} = \frac{16xy}{(x^2+2y^2+1)^3}, \end{aligned}$$

$$f_{yy}=\frac{4(-x^2+6y^2-1)}{(x^2+2y^2+1)^3}.$$

停留点 $(0,0)$ において, ヘッセ行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=8>0$$

および, $f_{xx}<0$ なので, この点は (狭義の) 極大である.

(10) まず偏微分を計算する:

$$f_x(x,y)=\frac{y^2(1-2xy-x^2)}{(x+y)^2},\qquad f_y(x,y)=\frac{x^2(1-2xy-y^2)}{(x+y)^2}.$$

停留点を求めるために, 方程式 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を解く. これらの方程式の差を考えることで次の方程式が得られる:

$$(x+y)(x-y)(1-2xy-x^2-y^2)=0.$$

$x,y>0$ という仮定より, 上の方程式を満たす (x,y) は, $x-y=0$ か $1-2xy-x^2-y^2=0$ のいずれかを満たす. $x-y=0$ のとき, もとの方程式を解くことで, $(x,y)=(1/2,1/2)$ という解が得られる. 一方で $1-2xy-x^2-y^2=0$ のとき, これを使ってもとの方程式 $f_x=f_y=0$ を書き直すと, $x^2y^2=0$ という方程式ただ一つが得られる. この方程式は, $x,y>0$ という仮定のもとでは解を持たない. 従って, 停留点は $(x,y)=(1/2,1/2)$ だけであることがわかる. 次に 2 階偏微分を計算する:

$$\begin{aligned} f_{xx}&=\frac{-2y^2(y^2+1)}{(x+y)^3},\\ f_{xy}=f_{yx}&=\frac{xy(1-x^2-y^2)}{(x+y)^3},\\ f_{yy}&=\frac{-2x^2(x^2+1)}{(x+y)^3}. \end{aligned}$$

よって, 停留点 $(x,y)=(1/2,1/2)$ においては, 次が成り立つ:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}=\frac{3}{8}>0,\qquad f_{xx}(x,y)=-\frac{5}{8}<0.$$

従って, 停留点 $(1/2,1/2)$ は (狭義の) 極大である.