微分積分学 II 演習問題 2

問題 1. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級曲線 $(x(t), y(t))$, $(a \le t \le b)$ が与えられたとする．関数 $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ が C^1 級で $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ および $\varphi'(t) > 0$, $(a \le t \le b)$ を満たすとき, C^1 級曲線 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, $(a \le t \le b)$ を $\tilde{x}(t) = x(\varphi(t))$ および $\tilde{y}(t) = y(\varphi(t))$ によって定める．このとき, 曲線 $(x(t), y(t))$ の長さ ℓ と, 曲線 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ の長さ $\tilde{\ell}$ が一致することを証明せよ．

問題 2. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級曲線 $(x(t), y(t))$, $(a \le t \le b)$ が, ある C^1 級関数 $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ を用いて, $x(t) = r(t)\cos t$ および $y(t) = r(t)\sin t$ で与えられたとする．この曲線の長さ ℓ が以下で与えられることを示せ:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2}\,dt.$$

問題 3. 以下の曲線 $(x(t), y(t))$ の長さを求めよ．(ただし $r > 0$ とする.)

$$(1) \quad \begin{cases} x(t) = r\cos t, \\ y(t) = r\sin t. \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$(2) \quad \begin{cases} x(t) = r\cos^3 t, \\ y(t) = r\sin^3 t. \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$(3) \quad \begin{cases} x(t) = r(1 + \cos t)\cos t, \\ y(t) = r(1 + \cos t)\sin t. \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$(4) \quad \begin{cases} x(t) = r(t - \sin t), \\ y(t) = r(1 - \cos t). \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$(5) \quad \begin{cases} x(t) = rt\cos t, \\ y(t) = rt\sin t. \end{cases} \quad (0 \le t \le 1)$$

$$(6) \quad \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = r\cosh \dfrac{t}{r}. \end{cases} \quad (0 \le t \le c)$$

以上.

解答

問題 1. 曲線 $(x(t), y(t))$ は C^1 級なので, その長さ ℓ は次の公式で与えられる:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

同様に, 曲線 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ の長さ $\tilde{\ell}$ は次で与えられる:

$$\tilde{\ell} = \int_a^b \sqrt{(\tilde{x}'(t))^2 + (\tilde{y}'(t))^2}dt.$$

曲線 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ の定義に従って $\tilde{\ell}$ を計算すると次のようになる:

$$\begin{aligned}
\tilde{\ell} &= \int_a^b \sqrt{(x'(\varphi(t))\varphi'(t))^2 + (y'(\varphi(t))\varphi'(t))^2}dt \\
&= \int_a^b \sqrt{(x'(\varphi(t)))^2 + (y'(\varphi(t)))^2}\sqrt{(\varphi'(t))^2}dt \\
&= \int_a^b \sqrt{(x'(\varphi(t)))^2 + (y'(\varphi(t)))^2}\varphi'(t)dt \\
&= \int_a^b \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}ds = \ell.
\end{aligned}$$

問題 2. $x(t) = r(t)\cos t$ および $y(t) = r(t)\sin t$ であることより, 次を得る:

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2}.$$

よって ℓ を求める公式から示すべき式が得られる.

問題 3.

(1) $\ell = r\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$

(2) $\ell = \dfrac{\sqrt{3}r}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin 2t|dt = 2\sqrt{3}r\int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 2\sqrt{3}r.$

(3) $\ell = 2r\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt = 4r\int_0^{\pi} \cos\frac{t}{2}dt = 8r.$

(4) $\ell = 2r\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 8r.$

(5)
$$\begin{aligned}
\ell &= r\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt \\
&= r\left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\log(t + \sqrt{t^2+1})\right]_0^1 = r\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})\right).
\end{aligned}$$

(6) $\ell = \displaystyle\int_0^c \cosh\frac{t}{r}dt = \sinh\frac{c}{r}.$