線形代数学 II 演習問題 (2013 年 10 月 7 日)

問題 1. 以下のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ の生成系になるかどうかを答えよ.

[1] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ [2] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

[3] $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ [4] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

問題 2. 以下のベクトル空間 $V \subset \mathbb{R}^3$ の生成系の例を与えよ.

[1] $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

[2] $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

[3] $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

問題 3. 以下のベクトル部分空間 $V \subset \mathbb{R}^3$ とベクトル $u \in \mathbb{R}^3$ に対して, $u \in V$ であるかどうかを判定せよ.

[1] $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(i) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ii) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (iii) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

[2] $V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(i) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ii) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (iii) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

[3] $V = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(i) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ii) $u = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (iii) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

問題 4. 以下の部分空間 $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^3$ とベクトル $u \in \mathbb{R}^3$ に対して, $u \in V_1 + V_2$ であるかどうかを判定せよ.

[1] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

(i) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ii) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (iii) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

[2] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

(i) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ii) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (iii) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

[3] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

(i) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ii) $u = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (iii) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

[4] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

(i) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ii) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (iii) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[5] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

(i) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ii) $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (iii) $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 5. 以下の部分空間 $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$ に対し $V_1 + V_2$ が直和かどうか判定せよ.

[1] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

[2] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

[3] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

[4] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

[5] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

[6] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

[7] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

[8] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

問題 6. 以下の部分空間 $V_1, V_2, V_3 \subset \mathbb{R}^3$ に対し $V_1 + V_2 + V_3$ が直和かどうか判定せよ.

[1] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

[2] $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$

問題 7. 部分空間 $V_1, \cdots, V_5 \subset \mathbb{R}^3$ を以下のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 2x + y + z = 0 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x - y - z = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 3x + 2y + z = 0 \right\}, \quad V_4 = V_1 \cap V_2, \quad V_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

このとき, 以下の部分空間が直和かどうかを答えよ.

[1] $V_1 + V_2$ [2] $V_3 + V_4$ [3] $V_3 + V_4 + V_5$

問題 8. 部分空間 $V_1, \cdots, V_5 \subset \mathbb{R}^3$ を以下のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ x + y + z = 0 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 2x + 3y + 4z = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\ 3x + 4y + 5z = 0 \right\}, \quad V_4 = V_1 \cap V_2, \quad V_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

このとき, 以下の部分空間が直和かどうかを答えよ.

[1] $V_1 + V_2$ [2] $V_3 + V_4$ [3] $V_3 + V_4 + V_5$

以上.

解答

問題 1. [1] なる [2] ならない [3] なる [4] ならない

問題 2.

$$[1]\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [2]\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [3]\quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

問題 3.

[1] (i) $u \in V$ (ii) $u \notin V$ (iii) $u \in V$
[2] (i) $u \in V$ (ii) $u \in V$ (iii) $u \in V$
[3] (i) $u \notin V$ (ii) $u \in V$ (iii) $u \notin V$

問題 4.

[1] (i) $u \in V$ (ii) $u \in V$ (iii) $u \notin V$
[2] (i) $u \in V$ (ii) $u \in V$ (iii) $u \notin V$
[3] (i) $u \in V$ (ii) $u \notin V$ (iii) $u \notin V$
[4] (i) $u \in V$ (ii) $u \notin V$ (iii) $u \notin V$
[5] (i) $u \notin V$ (ii) $u \in V$ (iii) $u \in V$

問題 5.

[1] 直和である [2] 直和でない [3] 直和である [4] 直和である
[5] 直和でない [6] 直和でない [7] 直和である [8] 直和でない

問題 6. [1] 直和である [2] 直和でない
問題 7. [1] 直和でない [2] 直和である [3] 直和でない
問題 8. [1] 直和でない [2] 直和でない [3] 直和でない

問題 7 補足: $V_1, \cdots, V_4$ を生成系で書くと例えば次のようになる:

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$V_1 \cap V_2 = V_4 \neq \{0\}$ なので $V_1 + V_2$ は直和でない. $V_3 \cap V_4 = \{0\}$ なので $V_3 + V_4$ は直和である. $V_5 \cap (V_3 + V_4) \supset V_5 \neq \{0\}$ なので, $V_3 + V_4 + V_5$ は直和でない.

問題 8 補足: $V_1, \cdots, V_4$ を生成系で書くと例えば次のようになる:

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$V_1 \cap V_2 = V_4 \neq \{0\}$ なので $V_1 + V_2$ は直和でない. $V_3 \cap V_4 = V_1 \cap V_2 \cap V_3 = V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$ なので $V_3 + V_4$ も直和でなく, このことより $V_3 + V_4 + V_5$ も直和でない.