線形代数学 II 演習問題 (2013 年 10 月 15 日)

問題 1. 以下のベクトルの組が ($\mathbb{R}$ 上で) 一次独立かどうかを答えよ.

[1] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ [2] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

[3] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ [4] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

[5] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ [6] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

[7] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ [8] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

[9] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ [10] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

[11] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$ [12] $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

問題 2. 以下の部分ベクトル空間 $V \subset \mathbb{R}^3$ の基底を求めよ.

[1] $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$

[2] $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$

[3] $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

[4] $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

[5] $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

[6] $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

問題 3.

[1] $\mathbb{R}^4$ の部分ベクトル空間 V_1 と V_2 を次のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \ 2x - y + z - 2w = 0 \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \ x + 3y - 3z - w = 0 \right\}.$$

(a) $V_1 \cap V_2$ の基底を求めよ.
(b) 上で求めた基底を含むような V_1 と V_2 の基底をそれぞれ求めよ.

[2] $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 V_1 と V_2 を次のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ x - y = 0 \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ y - z = 0 \right\}.$$

(a) $V_1 \cap V_2$ の基底を求めよ.
(b) 上で求めた基底を含むような V_1 と V_2 の基底をそれぞれ求めよ.

[3] $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 V_1 と V_2 を次のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ 2x + y = 0 \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ y + 2z = 0 \right\}.$$

(a) $V_1 \cap V_2$ の基底を求めよ.
(b) 上で求めた基底を含むような V_1 と V_2 の基底をそれぞれ求めよ.

[4] $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 V_1 と V_2 を次のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ x - y + z = 0 \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ 2x + y - z = 0 \right\}.$$

(a) $V_1 \cap V_2$ の基底を求めよ.
(b) 上で求めた基底を含むような V_1 と V_2 の基底をそれぞれ求めよ.

[5] $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 V_1 と V_2 を次のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ 3x - y + 3z = 0 \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ 2x + 2y - z = 0 \right\}.$$

(a) $V_1 \cap V_2$ の基底を求めよ.
(b) 上で求めた基底を含むような V_1 と V_2 の基底をそれぞれ求めよ.

[6] $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 V_1 と V_2 を次のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ x - 2y + 3z = 0 \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ 3x + 2y - z = 0 \right\}.$$

(a) $V_1 \cap V_2$ の基底を求めよ.
(b) 上で求めた基底を含むような V_1 と V_2 の基底をそれぞれ求めよ.

[7] $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 V_1 と V_2 を次のように定める.

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ x - 3y + z = 0 \right\},$$

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \ 2x + y - 4z = 0 \right\}.$$

(a) $V_1 \cap V_2$ の基底を求めよ.
(b) 上で求めた基底を含むような V_1 と V_2 の基底をそれぞれ求めよ.

解答

問題 1.

[1] 一次従属	[2] 一次独立	[3] 一次従属	[4] 一次独立
[5] 一次独立	[6] 一次独立	[7] 一次従属	[8] 一次従属
[9] 一次独立	[10] 一次従属	[11] 一次従属	[12] 一次独立

問題 2. 例えば次のような基底が解答となる.

[1] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ [2] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

[3] $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ [4] $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

[5] $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ [6] $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

問題 3. 例えば次のような基底が解答となる.

[1] (a) $V_1\cap V_2$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$,

(b) V_1: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$, V_2: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$.

[2] (a) $V_1\cap V_2$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$,

(b) V_1: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, V_2: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[3] (a) $V_1\cap V_2$: $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$,

(b) V_1: $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, V_2: $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[4] (a) $V_1\cap V_2$: $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$,

(b) V_1: $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$, V_2: $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$.

[5] (a) $V_1\cap V_2$: $\left\{\begin{pmatrix}-5\\9\\8\end{pmatrix}\right\}$,

(b) V_1: $\left\{\begin{pmatrix}-5\\9\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$, V_2: $\left\{\begin{pmatrix}-5\\9\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

[6] (a) $V_1\cap V_2$: $\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}\right\}$,

(b) V_1: $\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, V_2: $\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$.

[7] (a) $V_1\cap V_2$: $\left\{\begin{pmatrix}11\\6\\7\end{pmatrix}\right\}$,

(b) V_1: $\left\{\begin{pmatrix}11\\6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, V_2: $\left\{\begin{pmatrix}11\\6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$.