線形代数学 II 演習問題 (2013 年 10 月 28 日)

問題 1. 直交行列 $A \in O(n)$ に対し, その行列式 $|A|$ を求めよ.

問題 2. 任意の $P \in M(n,\mathbb{R}), v, w \in \mathbb{R}^n$ に対し, $(Pv, w) = (v, {}^tPw)$ が成り立つことを示せ. ただし $(\ ,\ )$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積で, ${}^tP$ は P の転置行列である.

問題 3. 以下の条件が同値であることを証明せよ.

(a) $A \in O(n)$.
(b) 任意の $v, w \in \mathbb{R}^n$ に対し, $(Av, Aw) = (v, w)$ が成り立つ.
(c) 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\|Av\| = \|v\|$ が成り立つ.
(d) $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ を用いて $A = (a_1 \cdots a_n)$ と表すとき, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である.

ただし, 上で $\mathbb{R}^n$ の内積は全て標準内積を考えているものとする.

問題 4. V を内積空間とするとき, 以下を証明せよ.

[1] 任意の部分空間 $W_1 \subset W_2 \subset V$ に対し, $W_1^\perp \supset W_2^\perp$ が成り立つ.
[2] 任意の部分空間 $W \subset V$ に対し, $(W^\perp)^\perp = W$ が成り立つ.

問題 5. $\mathbb{R}^3$ に標準内積が与えられているものとし, 以下の部分空間 $W \subset \mathbb{R}^3$ を考える.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\}.$$

[1] W の正規直交基底を求めよ.
[2] $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

問題 6. $\mathbb{R}^4$ に標準内積が与えられているものとし, 以下の部分空間 $W \subset \mathbb{R}^4$ を考える.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y + z + w = 0 \right\}.$$

[1] W の正規直交基底を求めよ.
[2] $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

問題 7. $\mathbb{R}^4$ に標準内積が与えられているものとし, 以下の部分空間 $W \subset \mathbb{R}^4$ を考える.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{c} x - 2y + 2x - w = 0 \\ 3x + y - z - 3w = 0 \end{array} \right\}.$$

[1] W の正規直交基底を求めよ.
[2] $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

問題 8. 以下では $\mathbb{R}^2$ の内積として次で定めたものを考える:

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

[1] ベクトル $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の長さ $\|v\|$ を計算せよ.

[2] 以下の $\mathbb{R}^2$ の基底 $\{v_1, v_2\}$ を Gram-Schmidt の方法で正規直交化せよ.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問題 9. 以下では $\mathbb{R}^3$ の内積として次で定めたものを考える:

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

[1] ベクトル $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ の長さ $\|v\|$ を計算せよ.

[2] 以下の $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を Gram-Schmidt の方法で正規直交化せよ.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[3] 以下の部分空間 $W \subset \mathbb{R}^3$ の正規直交基底を求めよ.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}.$$

[4] 上の部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

問題 10. 任意の $P \in M(n, \mathbb{C}), v, w \in \mathbb{C}^n$ に対し, $(Pv, w) = (v, P^* w)$ が成り立つことを示せ. ただし $(\ ,\ )$ は $\mathbb{C}^n$ の標準内積で, $P^* = {}^t\bar{P}$ である.

問題 11. $\mathbb{C}^2$ には標準的な Hermite 内積が与えられているとする. $\mathbb{C}^2$ の以下の基底 $\{v_1, v_2\}$ を Gram-Schmidt の方法で正規直交化せよ.

[1] $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ [2] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

問題 12. $\mathbb{C}^3$ には標準的な Hermite 内積が与えられているとする. $\mathbb{C}^3$ の以下の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を Gram-Schmidt の方法で正規直交化せよ.

[1] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ i \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ [2] $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta - 1 \\ \zeta^2 - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta - \zeta^2 \\ \zeta^2 - \zeta \end{pmatrix} \right\}$

ただし, $\zeta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である.

以上.

解答

問題 1. $\|A\| = \pm 1$.
定義 ${}^tAA = E$ と $\|{}^tA\| = \|A\|$ より $\|A\|^2 = 1$ となる.

問題 2. $(v, w) = {}^tvw$ より, $(Pv, w) = {}^t(Pv)w = {}^tv{}^tPw = (v, {}^tPw)$ を得る.

問題 3. 以下は解答の一例である.
(a) $\Rightarrow$ (b). 問題 2 の結果を使う.
(b) $\Leftrightarrow$ (c). 以下の公式を使えばよい.

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}, \qquad (v, w) = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2).$$

(b) $\Rightarrow$ (d). 標準基底 $e_1, \ldots, e_n$ に対して, $(Ae_i, Ae_j) = (a_i, a_j)$ が成り立つ. 問題 2 の結果を使えば, $(a_i, a_j) = \delta_{ij}$ となるが, これは $\{a_i\}$ が正規直交基底であることを意味している.
(d) $\Rightarrow$ (a). 表示 $A = (a_1 \cdots a_n)$ のもとで次が成り立つことを使う.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} (a_1, a_1) & \cdots & (a_1, a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_n, a_1) & \cdots & (a_n, a_n) \end{pmatrix}.$$

問題 4. 以下は正規直交基底を用いた証明の一例である.

[1] W_1 の基底 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ をとり, さらにベクトル $w_{k+1}, \ldots, w_\ell$ を付け加えて W_2 の基底 $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ が得られているとする.

$$\begin{aligned} v \in W_2^\perp &\Leftrightarrow (v, w_i) = 0. \quad (i = 1, \ldots, k, k+1, \ldots, \ell) \\ &\Rightarrow (v, w_i) = 0. \quad (i = 1, \ldots, k) \\ &\Leftrightarrow v \in W_1^\perp. \end{aligned}$$

よって, $W_2^\perp \subset W_1^\perp$ である.

[2] W の正規直交基底 $\{w_1, \ldots, w_k\}$ と $W^\perp$ の正規直交基底 $\{w'_1, \ldots, w'_\ell\}$ をとると, $\{w_i, w'_j\}$ は $V = W \oplus W^\perp$ の正規直交基底になることを用いる. まず, $W \subset (W^\perp)^\perp$ を示す: 任意の $w \in W$ は $w = \sum_i \alpha_i w_i$ と書ける. 各 w'_j に対して $(w_i, w'_j) = 0$ なので, $(w, w'_j) = \sum_i \alpha_i (w_i, w'_j) = 0$ である. すなわち, $w \in (W^\perp)^\perp$ である. 次に $W \subset (W^\perp)^\perp$ を示す: 任意の $v \in (W^\perp)^\perp$ に対して, $(v, w'_k) = 0$ が成り立つ. $v \in V$ なので $v = \sum_i \alpha_i w_i + \sum_j \beta_j w'_j$ と書くことができる. この v の表示のもとで次を得る:

$$0 = (v, w'_k) = \sum_i \alpha_i (w_i, w'_k) + \sum_j \beta_j (w'_j, w'_k) = \sum_j \beta_j (w'_j, w'_k) = \beta_k.$$

よって $v = \sum_i \alpha_i w_i$ と書けることになる. これは $v \in W$ を意味する.

問題 5. 以下は解答の一例である.

$$[1] \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad [2] \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 6. 以下は解答の一例である.

$$[1]\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad [2]\quad \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 7. 以下は解答の一例である.

$$[1]\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad [2]\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 8.

$$[1]\quad \|v\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2} \qquad [2]\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 9.

$$[1]\quad \|v\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_1^2 + x_3^2}$$

$$[2]\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[3]\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[4]\quad \left\{ \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

問題 10. $(v, w) = {}^t v \bar{w}$ を用い問題 2 と同様に示せる.

問題 11.

$$[1]\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\} \qquad [2]\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$$

問題 12.

$$[1]\quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad [2]\quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^2 \\ \zeta \end{pmatrix} \right\}$$