線形代数学 II 演習問題 (2013 年 11 月 11 日)

問題 1. 集合 S, T の間の写像 $f : S \to T$ と $g : T \to S$ が与えられたとする. もし, f と g が $g \circ f = 1_S$ を満たすならば, f は単射で g は全射であることを示せ.

問題 2. 線形写像 $f : V \to W$ が与えられたとする. 以下を示せ.

(a) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(b) 任意の $v \in V$ に対し, $f(-v) = -f(v)$ である.

(c) f が全単射であるとき, $f^{-1} : W \to V$ も線形写像である.

(d) 別の線形写像 $g : U \to V$ に対し, $f \circ g : U \to W$ も線形写像である.

問題 3. 線形写像 $f : V \to W$ が与えられたとする. 以下を示せ.

(a) f の核 $\mathrm{Ker} f \subset V$ は部分ベクトル空間である.

(b) f の像 $\mathrm{Im} f \subset W$ は部分ベクトル空間である.

問題 4. 以下, 行列 $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ が定める線形写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(f_A(v) = Av)$ について, 核と像の基底をそれぞれ与えよ.

[1] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [2] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

[3] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [4] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[5] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ [6] $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

[7] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [8] $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

[9] $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ [10] $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

[11] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ [12] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[13] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ [14] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

[15] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ [16] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[17] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [18] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[19] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ [20] $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

以上.

解答

問題 4. 各問題について, 核と像の順に基底の例をあげる.

[1] $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

[2] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

[3] なし, $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

[4] なし, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

[5] $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

[6] なし, $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

[7] なし, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

[8] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

[9] $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

[10] なし, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$.

[11] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

[12] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

[13] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

[14] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$.

[15] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

[16] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

[17] なし, $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

[18] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

[19] $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}\right\}$.

[20] なし, $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.