線形代数学 II 演習問題 (2013 年 12 月 2 日)

問題 1. 自然数 k に対し, 次数が 2 以下の複素数係数 1 変数多項式の集合を V と書く:

$$V = \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

V に和とスカラー倍を以下のように導入してベクトル空間とする:

$$\alpha(\sum_{i=0}^{2} a_i x^i) + \beta(\sum_{i=0}^{2} b_i x^i) = \sum_{i=0}^{2} (\alpha a_i + \beta b_i) x^i.$$

V の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を次で定める:

$$v_1(x) = 1, \qquad v_2(x) = x, \qquad v_3(x) = x^2.$$

以下で与えられる線形写像 $f : V \to V$ を, 上の基底について行列表示せよ.

[1] $f(\varphi(x)) = \varphi(x+1)$.
[2] $f(\varphi(x)) = \varphi(x-1)$.
[3] $f(\varphi(x)) = \varphi(2x)$.
[4] $f(\varphi(x)) = \varphi(2x-1)$.
[5] $f(\varphi(x)) = \varphi(0)$.
[6] $f(\varphi(x)) = \varphi(1)$.
[7] $f(\varphi(x)) = \varphi'(x)$.
[8] $f(\varphi(x)) = \varphi''(x) + 2\varphi(x)$.
[9] $f(\varphi(x)) = x\varphi'(x)$.
[10] $f(\varphi(x)) = \varphi''(x) - x\varphi'(x) - \varphi(x)$.

問題 2. V を次のような 2 変数多項式のなすベクトル空間とする:

$$V = \left\{ \sum_{i+j=2} \varphi_{i,j} x^i y^j \,\middle|\, \varphi_{i,j} \in \mathbb{C} \right\}.$$

V の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を以下で定める:

$$v_1(x,y) = x^2, \qquad v_2(x,y) = xy, \qquad v_3(x,y) = y^2.$$

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ に対して, 線形写像 $f : V \to V$ を $f(\varphi(x,y)) = \varphi(ax+by, cx+dy)$ で定めるとき, f を上で与えた基底について行列表示せよ.

問題 3. V を次のような 2 変数多項式のなすベクトル空間とする:

$$V = \left\{ \sum_{i+j=3} \varphi_{i,j} x^i y^j \,\middle|\, \varphi_{i,j} \in \mathbb{C} \right\}.$$

V の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を以下で定める:

$$v_1(x,y) = x^3, \qquad v_2(x,y) = x^2 y, \qquad v_3(x,y) = xy^2, \qquad v_4(x,y) = y^3.$$

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C})$ に対して, 線形写像 $f : V \to V$ を $f(\varphi(x,y)) = \varphi(ax+by, cx+dy)$ で定めるとき, f を上で与えた基底について行列表示せよ.

問題 4. V を次のような行列のなすベクトル空間とする:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{R}) \middle| \ x+y+z=0 \right\}.$$

V の基底 $\{v_1, v_2\}$ を以下で定める:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

このとき, 以下の線形写像 $f : V \to V$ を上の基底について行列表示せよ.

[1] $f(A) = UAU^{-1}$. ただし, $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

[2] $f(A) = UAU^{-1}$. ただし, $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

[3] $f(A) = UAU^{-1}$. ただし, $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

問題 5. V を次のような行列のなすベクトル空間とする:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) \middle| \ a+d=0 \right\}.$$

V の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を以下で定める:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

実数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対し, 行列 $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$ を考える. 線形写像 $f : V \to V$ を $f(A) = UA - AU$ で定めるとき, f を上で与えた基底について行列表示せよ.

問題 6. V を次のような行列のなすベクトル空間とする:

$$V = \left\{ A \in M(2,\mathbb{C}) \middle| \ A^* + A = 0 \right\}.$$

V の基底 $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ を以下で定める:

$$v_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

複素数 $u, v \in \mathbb{C}$ であって, $|u|^2 + |v|^2 = 1$ を満たすもの対し, 行列 $U = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C})$ を考える. 線形写像 $f : V \to V$ を $f(A) = UAU^{-1}$ で定めるとき, f を上で与えた基底について行列表示せよ.

以上.

解答

問題 1.

[1] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ [4] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

[5] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [6] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[7] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [8] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

[9] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [10] $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

問題 2.

$$\begin{pmatrix} a^2 & ac & c^2 \\ 2ab & ad+bc & 2cd \\ b^2 & bd & d^2 \end{pmatrix}.$$

問題 3.

$$\begin{pmatrix} a^3 & a^2c & ac^2 & c^3 \\ 3a^2b & a^2d+2abc & bc^2+2acd & 3c^2d \\ 3ab^2 & b^2c+2abd & ad^2+2bcd & 3cd^2 \\ b^3 & b^2d & bd^2 & d^3 \end{pmatrix}.$$

問題 4.

[1] $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ [3] $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 5.

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ -2b & 0 & 0 \\ 2c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

問題 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u^2+\bar{u}^2-v^2-\bar{v}^2}{2} & \frac{i(u^2-\bar{u}^2+v^2-\bar{v}^2)}{2} & -uv-\bar{u}\bar{v} \\ 0 & \frac{u^2-\bar{u}^2-v^2+\bar{v}^2}{2i} & \frac{u^2+\bar{u}^2+v^2+\bar{v}^2}{2} & i(-uv+\bar{u}\bar{v}) \\ 0 & u\bar{v}+\bar{u}v & i(u\bar{v}-\bar{u}v) & |u|^2-|v|^2 \end{pmatrix}.$$