線形代数学 II 演習問題 (2013 年 12 月 9 日)

1. 演習問題

問題 1. 正方行列 $B \in M(n, \mathbb{C})$ について, 以下の主張が同値であることを証明せよ.

(a) ある 0 でないベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ であって, $Bv = 0$ であるものが存在する.

(b) $|B| = 0$.

問題 2. 以下の行列 A の全ての固有値と各固有値の重複度を求めよ.

[1] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [4] $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

[5] $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ [6] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

[7] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ [8] $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[9] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [10] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[11] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [12] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[13] $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [14] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

[15] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [16] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

[17] $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ [18] $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[19] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [20] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 3. 以下の行列 A の固有値を求めよ.

[1] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

以上.

2. 解答

2.1. 問題 1. (解答例)

「(a) ⇒ (b)」であること: B の第 i 列をベクトル $b_i \in \mathbb{C}^n$ と書くことにし, $v = (v_i)$ と表すことにする. $v \neq 0$ より, ある $j \in \{1, \ldots, n\}$ について, $v_j \neq 0$ である. また, $Bv = 0$ より, $\sum_{i=1}^n v_i b_i = 0$ が成り立つ. これより, $b_j = -(\sum_{i \neq j} v_i b_i)/v_j$ が成り立つ. これを用いて B の行列式 $|B|$ を計算すると, 行列式の性質 (ある列に別の列を足しても行列式の値は変わらない等) より最終的に $|B| = 0$ を得る.

「(b) ⇒ (a)」であること: 対偶を示す. すなわち, 0 でないベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ であって $Bv = 0$ となるものが存在しないならば, $|B| \neq 0$ を示す. 0 でないベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ であって, $Bv = 0$ となるものが存在しない, ということは, B の列ベクトル $b_1, \ldots, b_n$ が一次独立であるということを意味する. このことから, B に左基本変形を施して上三角行列にしたとき, 対角成分はどれも 0 ではないものが得られる. この上三角行列の行列式は 0 ではない. 左基本変形に対応する行列の行列式も 0 ではないので, B の行列式も 0 ではない.

2.2. 問題 2.

[1] 1(重複度 2). (固有多項式 $(z-1)^2$)
[2] 0(重複度 2). (固有多項式 z^2)
[3] 1(重複度 2). (固有多項式 $(z-1)^2$)
[4] 2(重複度 2). (固有多項式 $(z-2)^2$)
[5] 1(重複度 3). (固有多項式 $(z-1)^3$)
[6] 2(重複度 3). (固有多項式 $(z-2)^3$)
[7] 1(重複度 3). (固有多項式 $(z-1)^3$)
[8] 0(重複度 3). (固有多項式 z^3)
[9] 1(重複度 1), 2(重複度 2). (固有多項式 $(z-1)(z-2)^2$)
[10] 0(重複度 0), 1(重複度 2). (固有多項式 $z(z-1)^2$)
[11] 0(重複度 1), 1(重複度 2). (固有多項式 $z(z-1)^2$)
[12] -1(重複度 1), 1(重複度 2). (固有多項式 $(z+1)(z-1)^2$)
[13] -1(重複度 1), 1(重複度 2). (固有多項式 $(z+1)(z-1)^2$)
[14] 1(重複度 1), -1(重複度 2). (固有多項式 $(z-1)(z+1)^2$)
[15] 1(重複度 1), 2(重複度 2). (固有多項式 $(z-1)(z-2)^2$)
[16] 0(重複度 2), 3(重複度 1). (固有多項式 $z^2(z-3)$)
[17] 0(重複度 1), 1(重複度 2). (固有多項式 $z(z-1)^2$)
[18] -2(重複度 2), 1(重複度 1). (固有多項式 $(z-1)(z+2)^2$)
[19] 0(重複度 1), 1(重複度 2). (固有多項式 $z(z-1)^2$)
[20] 0(重複度 2), 1(重複度 1). (固有多項式 $z^2(z-1)$)

2.3. 問題 3.

[1] -1(重複度 2), 1(重複度 2). (固有多項式 $(z-1)^2(z+1)^2$)
[2] 1(重複度 2), 2(重複度 2). (固有多項式 $(z-1)^2(z-2)^2$)