線形代数学 II 演習問題 (2013 年 12 月 16 日)

1. 演習問題

問題 1. 行列 $A \in M(n,\mathbb{C})$ および複素数係数多項式 $f(z) = \sum_{j=0}^{d} c_j z^j$ が与えられたとき, 行列 $f(A) \in M(n,\mathbb{C})$ を $f(A) = \sum_{j=0}^{d} c_j A^j$ によって定める. (ただし $A^0 = E$ である.) もし $v \in \mathbb{C}^n$ が A の固有値 λ の固有ベクトルならば, v は $f(A)$ の固有値 $f(\lambda) \in \mathbb{C}$ の固有ベクトルであることを示せ.

問題 2. 以下の行列 A の各固有値について, 対応する固有空間の基底を与えよ.

[1] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

[3] $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ [4] $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

[5] $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ [6] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

[7] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ [8] $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[9] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [10] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[11] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [12] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[13] $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ [14] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

[15] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [16] $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

[17] $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ [18] $\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[19] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [20] $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 3. 以下の行列 A の各固有値について, 対応する固有空間の基底を与えよ.

[1] $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ [2] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

以上.

2. 解答例

2.1. **問題 1.** 仮定より v は $v \neq 0$ および $Av = \lambda v$ を満たす. すると,

$$f(A)v = (\sum_{j=0}^{d} c_j A^j)v = \sum_{j=0}^{d} c_j A^j v = \sum_{j=0}^{d} c_j \lambda^j v = (\sum_{j=0}^{d} c_j \lambda^j)v = f(\lambda)v$$

が成り立つので, $v \neq 0$ は $f(A)$ の固有値 $f(\lambda)$ の固有ベクトルである.

2.2. **問題 2.**

[1] 固有多項式 $(z-1)^2$. $\mathrm{Ker}(A-1E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[2] 固有多項式 z^2. $\mathrm{Ker}(A-0E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

[3] 固有多項式 $(z-1)^2$. $\mathrm{Ker}(A-1E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

[4] 固有多項式 $(z-2)^2$. $\mathrm{Ker}(A-2E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

[5] 固有多項式 $(z-1)^3$. $\mathrm{Ker}(A-E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[6] 固有多項式 $(z-2)^3$. $\mathrm{Ker}(A-2E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[7] 固有多項式 $(z-1)^3$. $\mathrm{Ker}(A-E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

[8] 固有多項式 z^3. $\mathrm{Ker}(A-0E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

[9] 固有多項式 $(z-1)(z-2)^2$. $\mathrm{Ker}(A-E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Ker}(A-2E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[10] 固有多項式 $z(z-1)^2$. $\mathrm{Ker}A$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Ker}(A-E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

[11] 固有多項式 $z(z-1)^2$. $\mathrm{Ker}A$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Ker}(A-E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[12] 固有多項式 $(z+1)(z-1)^2$. $\mathrm{Ker}(A+E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Ker}(A-E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

[13] 固有多項式 $(z+1)(z-1)^2$. $\mathrm{Ker}(A+E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Ker}(A-E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[14] 固有多項式 $(z-1)^3$. $\mathrm{Ker}(A-E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[15] 固有多項式 $(z-1)(z-2)^2$. $\mathrm{Ker}(A-E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Ker}(A-2E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

[16] 固有多項式 $z^2(z-3)$. $\mathrm{Ker}A$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\mathrm{Ker}(A-3E)$ の基底 $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

[17] 固有多項式 $z(z-1)^2$. Ker$A$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, Ker$(A-E)$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

[18] 固有多項式 $(z-1)(z+2)^2$. Ker$(A-E)$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, Ker$(A+2E)$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

[19] 固有多項式 $z(z-1)^2$. Ker$A$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Ker$(A-E)$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

[20] 固有多項式 $z^2(z-1)$. Ker$A$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Ker$(A-E)$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2.3. **問題 3.**

[1] 固有多項式 $(z-1)^2(z+1)^2$. Ker$(A-E)$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, Ker$(A+E)$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

[2] 固有多項式 $(z-1)^2(z-2)^2$. Ker$(A-E)$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, Ker$(A-2E)$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.